VJEROJATNOST

Uvod u vjerojatnost I

'Zamislite kako neki čovjek 60 puta zaredom baci igraću kocku i da pri tome izbroji koliko je puta dobio svaki od 6 brojeva na kocki. Kad je završio s bacanjem, on konstantira jedno od ovoga dvoje:

1. Šest brojeva nisu se pojavili svaki jednako puta, *usprkos tome* što su svi brojevi imali jednaku vjerojatnost pojavljivanja.

2. Šest brojeva nisu se pojavili svaki jednako puta, *zato* što su svi brojevi imali jednaku vjerojatnost pojavljivanja.'

(Max Woitschach 1973. u knjižici 'Vjerojatnost i slučaj')

- ‘ako se slažete s 1. konstatacijom, morate čitati ovu knjigu dalje, jer ćete naučiti da je praktički nemoguće da se kod većeg broja bacanja svaki broj pojavi jednako puta. Potpuno jednaka šansa ... upravo uzrokuje nejednaku raspodjelu brojeva...

- ako se slažete s 2.konstatacijom, pripadate manjem broju onih kojima su osnove vjerojatnosti poznate, i pitanje je hoće li ova knjiga išta doprinjeti vašem znanju.'

(Max Woitschach 1973. u knjižici 'Vjerojatnost i slučaj')

Povijesni aspekti vjerojatnosti

- Pitanja vjerojatnosti su praktična pitanja s kojima se susrećemo u svakodnevnom životu, a posebno se često pojavljuju u igrama na sreću.
- Ljudi su se počeli baviti vjerojatnošću davno (tisućama godina).
- 1560.godine, talijanski liječnik, profesor geometrije i strastveni kockar **Girolamo Cardano** izračunao da je vjerojatnost svake strane kocke 1/6 ('Knjiga o igrama kockom').
- 1620. godine **Galileo Galilei** je objavio knjigu "Razmišljanja o igrama kockom" gdje je objašnjavao vjerojatnost različitih ishoda ako se igra dvjema kockama.

  Navodi da ako zajedno s jednom kockom, koja može pasti na bilo koju od šest strana, a za što je vjerojatnost podjednaka, bacamo još jednu kocku koja također ima šest strana, može se dobiti 36 različitih ishoda jer se svaka strana jedne kocke može javiti u kombinaciji sa svakom stranom druge kocke.

Imajmo na umu...

- Zakoni vjerojatnosti kojima se koristimo u životu nisu uvijek posve jednostavni i razumljivi, i svakodnevno iskustvo i logika, koju u životu koristimo, često nisu u skladu sa zakonima koje nam daje statistika.
- Ta subjektivna vjerojatnost pripada među psihološke, a ne statističke konstrukte, i katkad sa statističkom, odnosno, matematičkom vjerojatnošću nema mnogo veze.
- Na primjer, ljudi vjeruju kako će možda ipak dobiti na lutriji ili osvojiti novac na kladionici, ali praktički ne vjeruju da će im se dogoditi neka prometna ili druga nesreća, tj. misle kako je vjerojatnost za to manja.

  Ipak, veća je vjerojatnost za ovo drugo!!!

Osnove vjerojatnosti

- Statistika je utemeljena na matematičkoj teoriji vjerojatnosti, a ona, u svojoj osnovi, na *teoriji skupova*.

Osnovni pojmovi teorije skupova

- **S ili** Ω **= prostor (skup)** elementarnih događaja (ishoda/elemenata/članova skupa) je skup čiji događaji reprezentiraju sve moguće ishode u matematičkom eksperimentu.
- Skupove označavamo s velikim slovima npr. A, B...
- Navođenje članova skupa A:

  $A=\{A_1,A_2...A_k\}$,
- Pripadnost elementa X skupu A:

  $X \in A$

Osnovni pojmovi teorije skupova

- **Događaj** je podskup prostora događaja.
- Može biti:

  a) Elementarni događaj (skup koji sadrži samo jedan element iz prostora događaja), vs

  b) Unija elementarnih događaja (skup od nekoliko članova)

- Razlikujemo: **slučajni** događaj od **nužnog** događaja (ne mora nužno nastupiti u nekom trenutku)

- Svaki događaj ima svoju vjerojatnost:

  p (A_1) – vjerojatnost događaja A_1

Osnovni pojmovi teorije skupova

- **Konačni** vs **beskonačni** skupovi: skupovi s prebrojivim i neprebrojivim brojem elementarnih događaja

  Ako je S konačan skup, tada je k(S) jednako broju elemenata skupa S, što se piše kao:

  $k(S) = n$; S je n- član skup

Osnovni pojmovi teorije skupova

- **Prazni skup:** A= Ø

- **Ekvivalentni skupovi:** dva su skupa jednaka:

  A = B ako sadrže iste elemente:

  A= {X } i B= {X }

$\subset$

Osnovni pojmovi teorije skupova

- **Podskup** je skup čiji svi članovi pripadaju drugom skupu (nadskupu tog podskupa).

  $A \subseteq B$ ako $A=\{a \mid a \in A \wedge a \in B\}$

- **Pravi podskup** je podskup kojemu nedostaje barem jedan član njegovog nadskupa.

  Skup A je pravi podskup skupa B ako su svi članovi od A također članovi od B, ali barem jedan član od B nije član od A.

  $A \subset B$ ako $A \subseteq B$ i $A \neq B$

Kolmogorov (1930.): KLASIČNA TEORIJA VJEROJATNOSTI

Prostor vjerojatnosti je uređena trojka:
(S, *F* **(S),P),** gdje je:

- **S ili** Ω – skup elementarnihdogađaja (potencijalnih ishoda slučajnog eksperimenta)

- ***F* (S)** – skup svih podskupova skupa S (složeni događaji) (→ovime je naglašena konačnost odn prebrojivost skupa S)

- **P** – funkcija P koja je određena sa *F*(S), mjera vjerojatnosti

Aksiomi Kolmogorova:

1. **<u>nenegativnost</u>**

   → ako je **A∈*F* (S), p(A) ≥ 0**

   Za svaki A koji je element od F(S) vrijedi da je njegova vjerojatnost nenegativan realan broj.

2. **<u>normiranost</u>**

   → **P(S) = 1**

   Mjera vjerojatnosti cijeloga skupa je 1.

3. **<u>aditivnost</u>**

   → **ako je A∩B=∅, (AUB)=P(A)+P(B)**

   Ako su A i B međusobno ***isključivi*** događaji (događaji koji ne mogu nastupiti istodobno, presjek im je prazan skup), vjerojatnost događaja koji čini njihovu uniju jest suma njihovih pojedinačnih vjerojatnosti.

VJEROJATNOST ‘A PRIORI’

(Teorijska vjerojatnost)

Za bilo koji podskup A (skup povoljnih ishoda) vrijedi:

$$\mathbf{p(A) = k(A) / k(S)}$$

gdje je:

P(A) = vjerojatnost nastupa događaja A

kA = broj elementarnih događaja koji tvore događaj A

kS = ukupan broj svih *jednako mogućih* elementarnih događaja

Vjerojatnost *"a priori"* je, dakle, broj povoljnih događaja podijeljen s brojem mogućih događaja.

Skala vjerojatnosti:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

P(S)=1 (*100)=100%

P(ø)=0

Vjerojatnost komplementarnih događaja

- Komplementarni skup($\bar{A}$ ili A'): oni članovi skupa S koji ne pripadaju skupu A, čine komplement od A u S.

  $A' = \{x \mid x \in S, x \in A\}$

  A' sadrži sve elemente događaja prostora S koji ne čine A.

- **Vjerojatnost komplementarnih** ili suprotnih događaja (vjerojatnost ne A):

  $\mathbf{p(A') = 1 - p(A)}$

Primjer

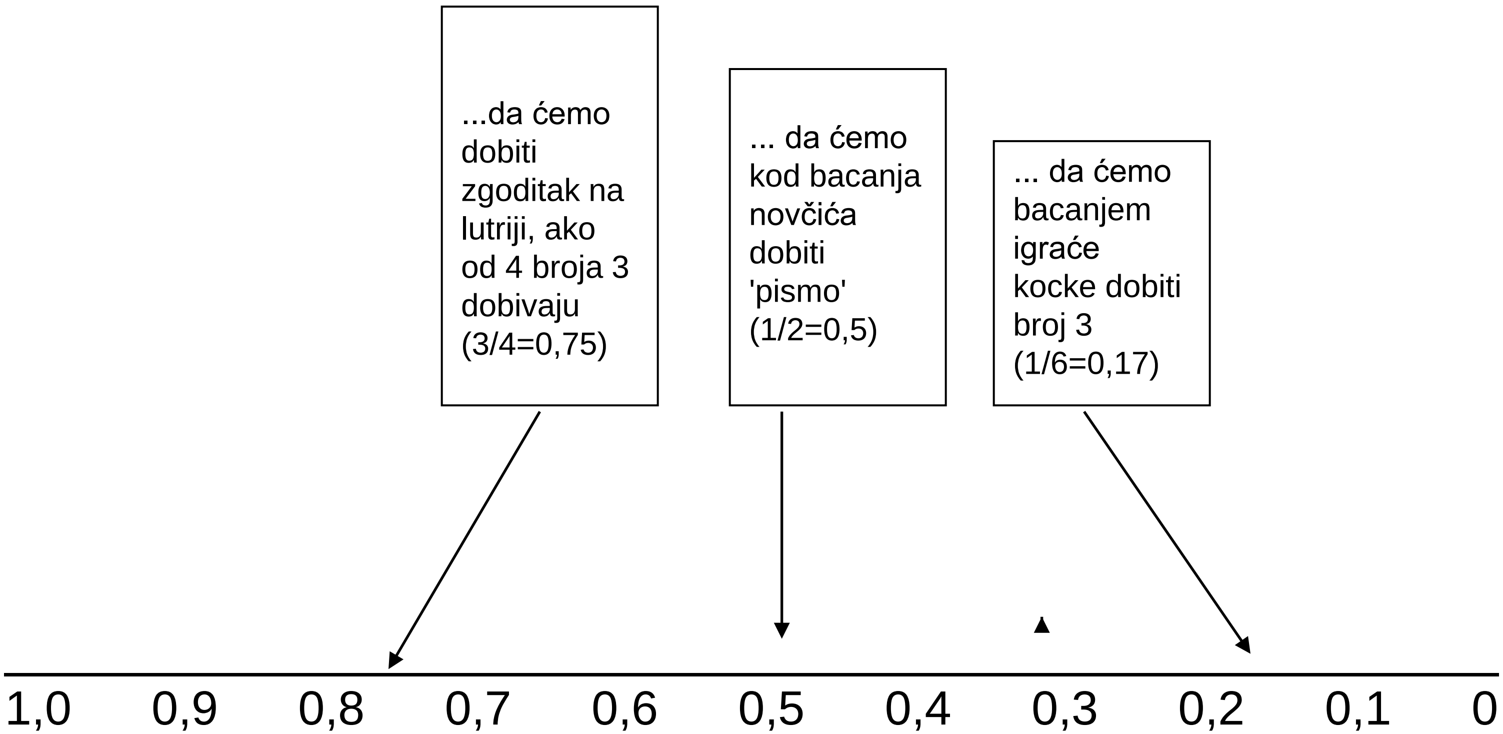
Ako je vjerojatnost prodaje proizvoda 0,52, kolika je vjerojatnost da se proizvod neće prodati?

P (ne prodaja) = 1 – P (prodaja) = 1 - 0,52 = 0,48

OSNOVNA PRAVILA VJEROJATNOSTI

1. Pravilo

- Potpuno sigurno da će se nešto dogoditi: max. vjerojatnost: **p=1**
- Potpuno sigurno da se nešto neće dogoditi **p=0**
- Svi slučaji vjerojatnosti nalaze se između apsolutne sigurnosti (p=1) i apsolutne nemogućnosti (p = 0)


...da ćemo dobiti zgoditak na lutriji, ako od 4 broja 3 dobivaju (3/4=0,75)
... da ćemo kod bacanja novčića dobiti 'pismo' (1/2=0,5)
... da ćemo bacanjem igraće kocke dobiti broj 3 (1/6=0,17)
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0

2. Pravilo

Vjerojatnost da će se između N međusobno nezavisnih, a jednako vjerojatnih događaja, dogoditi jedan određeni među njima: **p=1/N (vjerojatnost a priori*)**

Primjeri

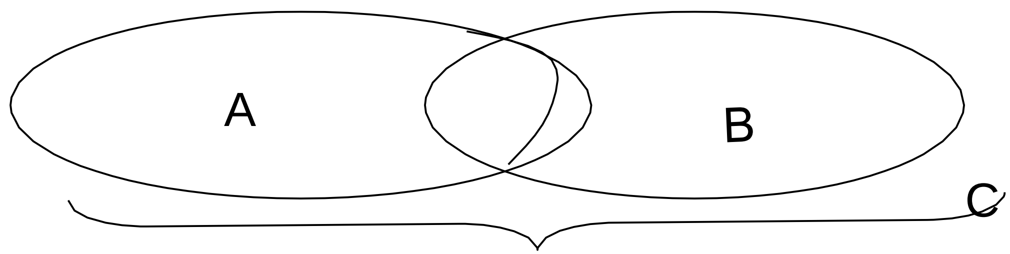
- Ako na igraćoj kocki postoje 6 jednako mogućih rezultata, vjerojatnost da ćemo kockom baciti broj tri jest 1/6 = 0,17
- Vjerojatnost da ćemo između 32 igraće karte izvući pikovu desetku jest 1/32= 0,03125 (nešto više od 3 %)

3. Pravilo

- **Unija događaja** podrazumijeva skup C koji nastaje udruživanjem članova skupova A i B.

(v podrazumijeva ili)

Unija A∪B= $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$



C= A U B

Vjerojatnost unije događaja – pravilo aditivnosti: Vjerojatnost da će se dogoditi *bilo koji od nekoliko* međusobno nezavisnih događaja (npr **A ili B**) jest **suma** vjerojatnosti svakog od pojedinačnih događaja.

Vjerojatnost unije isključivih događaja jest:

p(A U B)=p(A)+p(B)

Vjerojatnost unije događaja koji se međusobno ne isključuju jest:

p (A U B) = p(A) + p(B) – p (A ∩ B)

(∩ podrazumijeva i)

Primjeri

- Vjerojatnost p da će kod bacanja novčića pasti glava ili pismo jest 0,5+0,5=1, što je razumljivo jer nešto od tog dvoje mora pasti i to je potpuno sigurno.
- Vjerojatnost da ćemo kod jednog bacanja kocke baciti neparan broj (broj 5 ili broj 3 ili broj 1) jest 1/6+1/6+1/6=3/6=0,5

Primjer za vježbu

- Vjerojatnost plaćanja
  čekom je 0,4;
  gotovinom 0,2;
  karticom 0,2.

  Kolika je vjerojatnost plaćanja gotovinom ili karticom?

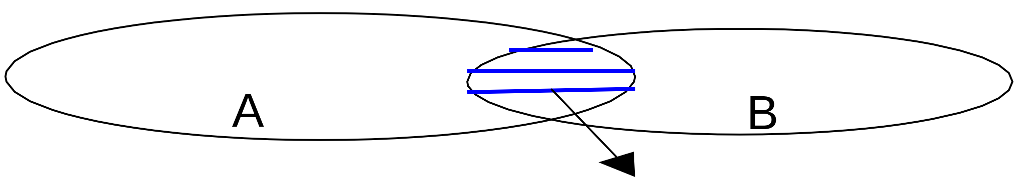
Odgovor

p (gotovina ili kartica) = 0,2 + 0,2 = 0,4

4. Pravilo

Presjek događaja A ∩ B – istodobni nastanak događaja A i B

Presjek $A \cap B=\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



D= A ∩ B

Vjerojatnost presjeka događaja – tzv. zajednička vjerojatnost - pravilo multiplikativnosti: Vjerojatnost da će se *zajedno* dogoditi dva ili više nezavisnih događaja jest **produkt** vjerojatnosti svakog od tih događaja.

p(A i B)= p(A∩B)= p (A) x p (B)

Primjeri

1. Ako je vjerojatnost kupovine proizvoda X 0,3,

   a vjerojatnost plaćanja gotovinom 0,2;

   kolika je vjerojatnost kako će kupac kupiti proizvod X i platiti ga gotovinom?

   p (kupovina X i gotovina) = 0,3 * 0,2 = 0,06

2. Vjerojatnost da ćemo kockom dva puta zaredom (ili s dvije kocke istovremeno) baciti broj 6 jest

   1/6 * 1/6 = 1/36 = 0,028

Primjer za vježbu

Kolika je vjerojatnost da ćemo pet puta zaredom baciti pismo (ili pak na pet novčića baciti pismo)?

Odgovor

1/2 * 1/2 * 1/2 * 1/2* 1/2 =1/32 =0,031.

To nam se dakle, najvjerojatnije može dogoditi u prosjeku samo tri puta u 100 pokušaja bacanja pet novčića (točnije: prosječno jednom u 32 pokušaja).

Primjer za vježbu

Ako bacamo jedan novčić 6 puta zaredom, koji je od ovih ishoda po vašem mišljenju najvjerojatniji?

G P P G P G

G G G P P P

P P P P P P

Odgovor

- Najvjerojatnije ćemo se odlučiti na 1. opciju jer iz iskustva znamo da se kod bacanja novčića najčešće nepravilno mijenja bilo glava bilo pismo.
- Ipak, svaki od tih ishoda **jednako vjerojatan**!

  → za svaki od njih vrijedi navedeno pravilo da je vjerojatnost ishoda produkt vjerojatnosti svakog pojedinog događaja, pa prema tome vjerojatnost ishoda bilo kojeg od tri ponuđena ishoda iznosi

  1/2* 1/2*1/2*1/2*1/2*1/2*=1/64=0,0156.
- Prvi nam se ishod čini najvjerojatnijim zato što će se kod šest bacanja novčića zaista najčešće događati da kao konačan ishod dobivamo čas glavu, čas pismo, ali vjerojatnost **točno definiranog ishoda** iznosi 0,0156.

Objašnjenje

- Prvi nam se ishod čini najvjerojatnijim zato što će se kod šest bacanja novčića zaista najčešće događati da kao konačan ishod dobivamo čas glavu, čas pismo, ali vjerojatnost **točno definiranog ishoda** iznosi 0,0156.
- Kod bacanja jednog novčića 6 puta (ili 6 numeriranih novčića jedanput) postoji 64 moguća ishoda.

  p=1/64=0,0156

  Samo jedan od njih 64 je ishod P P P P P P

  i jedan je ishod G G G G G G,

  a svi ostali ishodi su ishodi sa barem jednim P među ostalim G ili barem jednim G među svim ostalim P.

  Najčešći i najvjerojatniji je ishod, u kojem će se pojaviti 3 puta P i tri puta G, ali to se može dogoditi u 20 različitih redoslijeda, a svaki od tih redoslijeda ima jednaku vjerojatnost.

  Brojčano najviše ima ishoda s 'miješanim' G i P, što nas dovodi u zamku.

Primjer za vježbu: Bacali smo dvije kocke koje mogu pasti u 36 kombinacija. Kombinacije su prikazane u Tablici (I = prva kocka, II = druga kocka).

I II	I II	I II	I II	I II	I II
1 1	2 1	3 1	4 1	5 1	6 1
1 2	2 2	3 2	4 2	5 2	6 2
1 3	2 3	3 3	4 3	5 3	6 3
1 4	2 4	3 4	4 4	5 4	6 4
1 5	2 5	3 5	4 5	5 5	6 5
1 6	2 6	3 6	4 6	5 6	6 6

a) Kolika je vjerojatnost kombinacije 6-6?
b) Kolika je vjerojatnost kombinacije 3-4?

Odgovori

a) Samo je jedna kombinacija 6-6, a njezina je vjerojatnost 1/6*1/6=1/36

b) Vjerojatnost da će na jednoj kocki pasti broj 3, a na drugoj broj 4 – izračun ovisi o tome da li smo definirali poredak:

* ako smo definirali na prvoj kocki tri, a na drugoj 4, vjerojatnost je 1/6*1/6=1/36

* ako je svejedno na kojoj će kocki pasti 3, a na kojoj 4, onda postoje dvije mogućnosti na njih 36 i to 3-4 i 4-3, pa prema tome, vjerojatnost kombinacije 3-4 gdje je nebitan poredak iznosi 1/36+1/36=1/18.

Primjer za vježbu

- Kolika je vjerojatnost da će neki roditelji, koji planiraju četvero djece dobiti 4 kćeri?

Odgovor

1/2*1/2*1/2*1/2*=1/16.

To ne znači da ćemo u prosjeku na 16 brakova s djecom naći jedan brak s četvoro ženske djece,

nego da ćemo na 16 brakova s 4 djece naći u prosjeku jedan par s 4 kćeri, a također i jedan brak s 4 sina,

pa prema tome na 16 brakova s četvero djece naći ćemo u prosjeku dva braka u kojima je sve četvero djece istog spola.

Primjer za vježbu

- Koja je vjerojatnost da ćemo iz skupine od 52 igraće karte izvući karo kralja, srce desetku i tref asa?

Odgovor

Oprez,
to nije 1/52*1/52*1/52
nego 1/52*1/51*1/50 = 1/132 600

jer – pošto smo izvukli jednu kartu, preostalo ih je još 51 itd.

To će se dakle u prosjeku dogoditi 1 put u 132 600 pokušaja.

Primjer za vježbu

- Banka raspolaže s tri identična kompjuterska sustava: osnovnim i dva rezervna (back-up).

  Sustavi rade neovisno, s istom programskom podrškom.

  Prema navodu proizvođača, vjerojatnost zastoja sustava u jednom danu zbog hardwerskih poteškoća iznosi 0,01.

  Kolika je vjerojatnost da nastane zastoj u radu svih triju sustava u jednom danu?

Odgovor

$P = p(A1)*p(A2)*p(A3) = 0{,}01^3 = 0{,}000001.$

5. Pravilo

Ako netko ima N mogućnosti za uraditi jedan zadatak, r mogućnosti za drugi zadatak i p mogućnosti za treći zadatak,

onda je broj svih mogućih **kombinacija** tih triju zadataka: **N * r * p**

Primjeri

– Ako jedna igraća kocka može pasti na 6 mogućih načina, druga isto na 6 mogućih načina, onda obje mogu pasti u 6*6 različitih kombinacija = 36.
– Ako netko može birati 10 vlakova na putu Zagreb-Rijeka, a pri povratku sve te vlakove, osim onoga kojim je stigao, onda on ima 10*9= 90 mogućih kombinacija vlakova za odlazak i povratak zajedno.

Primjeri za vježbu

a) Ako u športskoj prognozi treba pogoditi rezultate 12 utakmica, od kojih svaka može imati tri ishoda (1, 2, 0), koliki je mogući broj kombinacija?

   Kolika je vjerojatnost da ćemo pogoditi?

a) Ako u restoranu možemo dobiti ručak koji se sastoji od juhe, mesa, priloga i kolača, a može se birati između

   4 juhe, 3 vrste mesa, 5 vrsta priloga i 4 vrste kolača,

   koliko se kombinacija može sastaviti iz ovog menija?

Odgovori

a) 3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3*3 = 531 441

Dakle, vjerojatnost da ćemo slučajno pogoditi iznosi 1/531 441= 0, 0000019 što praktički znači 2 na milijun.

b) Iz ovog menija može se sastaviti

4*3*5*4=240 kombinacija.

6. Pravilo

Broj **permutacija** (načina poredaka) za n predmeta iznosi : **n!**

Primjer

Ako imamo 4 broja, koliko postoji različitih poredaka?

Evo tih poredaka (svaki mogući poredak jest jedan stupac):

1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**2**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**	**4**
2	**2**	**3**	**3**	**4**	**4**	**1**	**1**	**3**	**3**	**4**	**4**	**1**	**1**	**2**	**2**	**4**	**4**	**1**	**1**	**2**	**2**	**3**	**3**
3	**4**	**2**	**4**	**2**	**3**	**3**	**4**	**1**	**4**	**1**	**3**	**2**	**4**	**1**	**4**	**1**	**2**	**2**	**3**	**1**	**3**	**1**	**2**
4	**3**	**4**	**2**	**3**	**2**	**4**	**3**	**4**	**1**	**3**	**1**	**4**	**2**	**4**	**1**	**2**	**1**	**3**	**2**	**3**	**1**	**2**	**1**

Sve te moguće permutacije mogu se izračunati ovako:

4! = 4*3*2*1 = 24

Vjerojatnost da ćemo pogoditi jedan mogući poredak jest 1/24= 0,042

Primjer za vježbu

- Ako domaćica ima na večeri osmero gostiju, na koliko načina oni mogu sjediti oko stola?

Odgovor

8!= 8*7*6*5*4*3*2*1= 40 320 načina

Prvi gost se može smjestiti na bilo koju od osam mogućih stolica,

kad je prvi smješten, drugi može sjesti na bilo koju od preostalih sedam

itd.......

7. Pravilo

Ako među n predmeta želimo ustanoviti koliko je mogućih **varijacija** za r tih predmeta, koristimo slijedeću formulu:

$$\frac{n!}{(n-r)!}$$

Primjer

- Ako je domaćica zabrinuta kako smjestiti samo četvero od ukupno 8 gostiju, onda ćemo dobiti:

$$\frac{8!}{(8-4)!} = \frac{8!}{4!} = \frac{8*7*6*5*4*3*2*1}{4*3*2*1} =$$ **8*7*6*5= 1680**

Ovu smo formulu mogli primijeniti i na prijašnjem primjeru:

$$\frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8!}{1} =$$ **8!**

8. Pravilo

Ako nam nije važan redoslijed ljudi ili stvari, broj **kombinacija** za r predmeta među n predmeta, iznosi :

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Primjer

Koja je vjerojatnost da između brojeva 1 do 10 izvučemo brojeve 3 i 5?

Kada bi se tražio točan redoslijed, račun bi iznosio $$\frac{10!}{(10-2)!} = 90$$

Dakle postoji 90 mogućih skupina od po dva broja, od kojih je samo jedna skupina koja se sastoji od 3 i 5.

Budući da nama redoslijed nije bitan, vjerojatnost ishoda se povećava:

$$\frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

Vjerojatnost da ćemo između brojeva 1 do 10 izvući brojeve 3 i 5 (ili bilo koja druga dva definirana broja) jest 1/45 = 0,022

Isti zadatak mogli smo izračunati drugačije...

... kombinacijom zakona multiplikacije i adicije:

P(prvo 3)=1/10
P(5 od preostalih 9)=1/9
P(prvo 5 pa 3)=1/10*1/9=1/90

Vjerojatnost da ćemo najprije izvući broj 3 iznosi 1/10, te da ćemo od preostalih 9 brojeva izvući broj 5 je 1/9, što znači da je vjerojatnost za izvlačenje oba broja: 1/10*1/9= 1/90

P (prvo 3 pa 5) =1/90

No, ista takva vjerojatnost (1/90) postoji i za drugi redoslijed (prvo broj 5, pa onda 3),

P(3 i 5, bez obzira na poredak)
= 1/90+1/90 = 1/45

pa je vjerojatnost da će bez obzira na redoslijed biti izvučeni brojevi 3 i 5 biti 1/90+1/90= 1/45

Primjer za vježbu

- Koja je vjerojatnost da ćemo u igri pogađanja (npr. loto) od 49 brojeva pogoditi 6 brojeva?

Odgovor

- Rješenje se sastoji u računanju svih mogućnosti od 6 brojeva među 49:

$$\frac{49!}{6!(49-6)!} = \frac{49!}{6!43!} = \frac{49*48*47*46*45*44}{6!} = 13983816$$

Prema tome, vjerojatnost da ćemo pogoditi 6 brojeva između 49 više je nego neznatna, iznosi oko 1:14 milijuna.

UVJETNA VJEROJATNOST

Uvjetna vjerojatnost = vjerojatnost događanja događaja B, uz uvjet da se odigrao događaj A:

p (B│A) = $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$ **ako je p(A) ≠0.**

Iz ovoga proizlazi da je zajednička vjerojatnost događaja A i B produkt uvjetne vjerojatnosti B u A i individualne vjerojatnosti od A:

p(A∩B)=p(B│A) * p(A)

- Prije izračuna uvjetne i zajedničke vjerojatnosti je potrebno utvrditi da li su događaji **zavisni**, **nezavisni** ili su možda **međusobno isključivi**.

Statistička nezavisnost događaja A i B

- Dva događaja su nezavisna ako bilo koji ishod jednog događaja ne utječe na vjerojatnost bilo kojeg ishoda drugog događaja.

Zajednička vjeroj. <u>nezavisnih</u> događaja A i B
jest produkt njihovih individualnih vjerojatnosti: $\mathbf{p(A \cap B)=p(A)*p(B)}$

Uvjetna vjerojatnost <u>nezavisnih</u> događaja A i B jest:

vjerojatnost A u danom B je individualna vjerojatnost samog A:

$$\mathbf{p(A|B)=p(A)}$$

vjerojatnost B u danom A je individualna vjerojatnost samog B:

$$\mathbf{p(B|A)=p(B)}$$

Međusobna isključivost događaja A i B

Ako su dva događaja međusobno isključiva, vjerojatnost da se zajedno pojave je nula.

Ako je

$$p(A \cap B) = \emptyset,$$
$$p(A) \neq 0 \text{ i}$$
$$p(B) \neq 0,$$

onda je:

$$p(A|B) = 0 \qquad \text{i} \qquad p(B|A) = 0$$

Odnosno, uvjetna vjerojatnost međusobno isključivih događaja je nula.

Primjeri vjerojatnosti **nezavisnih događaja** – bacanje novčića

P(A) – vjerojatnost da će u prvom pokušaju bacanja novčića pasti glava = 0.5

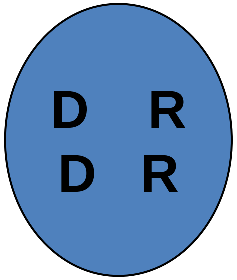
P(B) – vjerojatnost da će u drugom pokušaju bacanja novčića pasti glava = 0.5

P(A ∩ B)- vjerojatnost da će u oba dva pokušaja pasti glava = 0.5*0.5= 0.25

P(AU B)- vjeroj da će u 1. ili 2. pokušaju pasti glava = P(A)+P(B)-(A ∩ B)=
0.5+0.5-0.25 = 0.75

P(B|A) = P(B) = uvjetna vjeroj da će u drugom pokušaju pasti glava ako je u prvom pala glava je nepromijenjena = 0.5

Primjer vjerojatnosti **zavisnih događaja –** izvlačenje iz šešira →



P(A) – vjerojatnost izvlačenja D u prvom izvlačenju iz šešira s 2 D i 2 R
P(A)= 1/2

P(B) – vjerojatnost izvlačenja D u drugom izvlačenju (bez obzira na ishod prvog izvlačenja): (Ako je D izvučen u prvome ostaje nam 1 D i 2 R pa je vjeroj za D u 2. izvlačenju1/3, a ako je R izvučen u prvome ostaju nam 2 D i 1 R pa je vjeroj za D u 2. izvlačenju 2/3. Oba su ishoda jednako moguća pa računamo prosjek) 1/3+2/3 =1 →1/2
P(B)=1/2

P(B|A) – vjerojatnost izvlačenja D kao drugoga pod uvjetom da je D već izvučen
P(B|A) =1/3

P(A ∩ B) –vjerojatnost izvlačenja D prvoga i D drugoga jest: P(A)*P(B|A) = 1/2*1/3
P(A ∩ B) =1/6

Provjera P(B|A) = P(A ∩ B)/P(A) = (1/6) / (1/2) =1/3

P(AUB) =P(A)+P(B) - P(A ∩ B) =1/2+1/2-1/6= 5/6
P(AUB) =5/6 = 0.83

P(B) je moguće izračunati i pomoću Bayesovog teorema

1/3*1/2+2/3*1/2=1/6+2/6=3/6=1/2

Primjer uvjetne vjerojatnosti zavisnih događaja

Neka je S = populacija odraslih koji su kategorizirani po spolu i zaposlenosti na slijedeći način:

	ZAPOSLENI	NEZAPOSLENI
M	460	40
Ž	140	260

Koliko je vjerojatno da će izabrana osoba biti muškarac, ako znamo da je izabrana osoba zaposlena.

A – izabrana osoba je zaposlena
B – izabrana osoba je muškarac

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{460}{900}}{\frac{600}{900}} = 0{,}77$$

Oprez ! p(A∩B) ne množimo jer A i B nisu nezavisni događaji !!!

Do istog smo odgovora mogli doći i drugačije...

	ZAPOSLENI	NEZAPOSLENI
M	460	40
Ž	140	260

p da je muškarac= 500 / 900= 0,56
p da je žena = 400 / 900= 0,44
p da je zaposlen (od svih M) = 460 /500 =0,92
p da je zaposlena (od svih žena) = 140 / 400 = 0,35
p zaposlenih muškaraca P=0,56 x 0,92=0, 515
pP zaposlenih žena p=0,44 x 0,35= 0,154

Vjerojatnost da je M, ako je zaposlen:
p da je muškarac zaposlen / p svih zaposlenih = 0,515 / (0,515+0,154)= 0,77

Primjer za vježbu

Ako je odabrana osoba žena, koliko je vjerojatno da je ljevoruka?

	LJEVACI	DEŠNJACI
M	20	29
Ž	10	41

Odgovor

A – izabrana osoba je žena

B – izabrana osoba je ljevoruka

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{10}{100}}{\frac{51}{100}} = 0{,}196$$

Bayesovo pravilo

- Bayes se bavio uvjetnom vjerojatnosti i izradio je matematičke postupke i pravila koji omogućavaju mijenjanje vjerojatnosti nekog ishoda pod utjecajem novih informacija – tzv. posteriorna vjerojatnost → p(A|B)

- Vjerojatnost događaja A kojeg uvjetuje događaj B je različita od vjerojatnosti događaja B koji je uvjetovan događajem A.

  Ipak, postoji određeni odnos među njima, i Bayesovo pravilo ili teorem je zapravo tvrdnja tog odnosa.

- Izvod uvjetne vjerojatnost A u B, te B u A

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}.$$

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Bayesovo pravilo

- Ako preuredimo i kombiniramo te dvije jednadžbe, dobivamo:

$$\Pr(A|B)\ \Pr(B) = \Pr(A\cap B) = \Pr(B|A)\ \Pr(A).$$

- Ako podjelimo obje strane s Pr(*B*), koji je različit od nule, dobivamo Bayesov theorem:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\ \Pr(A)}{\Pr(B)}.$$

Bayesovo pravilo

- Njegovom primjenom dobivamo posteriornu vjerojatnost: p(A|B) preko apriornih vjerojatnosti slučajnih događaja A i B: p(A) i p(B) te uvjetne vjerojatnosti događaja B pod uvjetom A: p(B|A)

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\,\Pr(A)}{\Pr(B)}.$$

Bayesovo pravilo -primjena

Budući da je:

$$\Pr(B) = \Pr(A \cap B) + \Pr(A^C \cap B) = \Pr(B|A)\Pr(A) + \Pr(B|A^C)\Pr(A^C)$$

gdje je A^C komplement od A, Bayesov teorem se često primjenjuje kao:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\ \Pr(A)}{\Pr(B|A)\Pr(A) + \Pr(B|A^C)\Pr(A^C)}.$$

Bayesovo pravilo - primjena

ili općenitije gdje je svaki{*Ai*} set prostora događaja:

$$\Pr(A_i|B) = \frac{\Pr(B|A_i)\ \Pr(A_i)}{\sum_j \Pr(B|A_j)\ \Pr(A_j)},$$

Primjer

Pretpostavimo da za neku određenu bolest, koja je rijetka –
prevalencija u populaciji iznosi **1 %** postoji test koji:

- u **100 %** slučajeva daje pozitivan rezultat ako je osoba bolesna
- ako osoba nije bolesna, točnost testa je **99%,** tj. kod zdravih ljudi on ipak u **1%** slučajeva daje pozitivan rezultat.

Jednog smo dana pregledali **1000** ljudi, te nas zanima kolika je vjerojatnost da će pozitivan rezultat biti uzrokovan bolešću?

Prema učestalosti te bolesti u populaciji, očekujemo da će među njima biti 1% bolesnih, tj. 10 ljudi.
Od preostalih 990, koji su zdravi, u 1% slučajeva će test biti lažno pozitivan, tj. kod 9,9 ili 10 ljudi.

Dakle, imat ćemo ukupno oko 20 pozitivnih dijagnoza, a samo njih 10 je točno što iznosi svega 50%.

Izračun istog primjera prema pravilima vjerojatnosti

Vjerojatnost da će se istovremeno pojaviti oba slučaja (i bolest, čije je vjerojatnost $p=0,01$ ili 1% i pozitivan nalaz čija je vjerojatnost kod bolesnih $p=1$ ili 100%) iznosi:

$p= 0,01 * 1,0= 0,01$ (zakon multiplikacije)

Vjerojatnost da netko nije bolestan od te bolesti ($p=0,99$), a ima pozitivan rezultat na tom testu ($p=0,01$) iznosi

$0,99*0,01= 0,0099$ (zakon multiplikacije)

Vjerojatnost da bilo koja osoba (bez obzira imala bolest ili ne) dobije pozitivan rezultat iznosi:

$0,01+0,0099 = 0,0199$ (zakon adicije)

Vjerojatnost da će pozitivan rezultat biti uzrokovan boleščću iznosi:

(vjerojatnost bolesti i istovremenog pozitivnog testa) / (vjerojatnost pozitivnog testa) =

$$\frac{0,01}{0,0199} = 0,5025$$

Izračun istog primjera primjenom Bayesovog principa

Ako definiramo A = bolest (A^c=nebolest), B= pozitivan rezultat

račun pomoću Bayesove formule izgleda ovako:

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(B|A)\,\Pr(A)}{\Pr(B|A)\Pr(A) + \Pr(B|A^C)\Pr(A^C)}.$$

$$\frac{\frac{p(A\cap B)}{p(A)} * p(A)}{\frac{p(A\cap B)}{p(A)} * p(A) + \frac{p(Ac\cap B)}{p(Ac)} * p(Ac)} =$$

$$\frac{\frac{0.01*1}{0.01} * 0.01}{\frac{0.01*1}{0.01} * 0.01 + \frac{0.99*0.01}{0.99} * 0.99} = \frac{0.01}{0.01 + 0.0099} = \frac{0.01}{0.0199} = 0.5025$$

Primjer za vježbu

Na nekom sveučilištu je odlučeno uvesti testiranje studenata kako bi ih se primilo na nastavu iz matematike. Pokazalo se da općenito 60% onih koji se prijavu za nastavu može je uspješno i završiti. Svi koji su se prijavili su i primljeni.

Od onih koji su završili nastavu, 80% ih je položilo i test. Od onih koji nisu uspjeli završiti nastavu 40% bi ih prošlo test. Ako bi se taj test uveo, i samo oni koji ga polože bi mogli upisati nastavu, koja je vjerojatnost da će oni koji upišu i završiti nastavu?

Rješenje

A – studenti koji su završili nastavu
B – studenti koji su položili test

vjerojatnost da će proći test ako je prošao nastavu je p (B │A) = 0,80
vjerojatnost da neće proći test, a hoće nastavu je p (B' │A) = 0,20
vjerojatnost da će proći test, a ne završit nastavu je p (B │A') = 0,40
vjerojatnost da neće proći ni nastavu ni test = p (B' │A') = 0,60

$$p(A|B) = \frac{p(BIA)\cdot p(A)}{p(BIA)\cdot p(A) + p(BIA')\cdot p(A')} = \frac{0{,}8\cdot 0{,}6}{0{,}8\cdot 0{,}6 + 0{,}4\cdot 0{,}4} = 0{,}75$$

- Poznavajući vjerojatnost pojavljivanja neke pojave očekuje se da će se dugo nepojavljivanje te pojave 'nadoknaditi' kasnijim pojavljivanjem.

  Međutim, vjerojatnost pojavljivanja nekog ishoda uvijek je jednaka bez obzira što je tome prethodilo.

  Npr. i ako 20 puta bacimo novčić, i u tih 20 puta svi su ishodi bili 'pismo', i u 21. pokušaju vjerojatnost pojavljivanja bilo glave bilo pisma je jednaka i iznosi 50%.

  Također, zanimljiva je predrasuda prema određenoj pravilnosti u rezultatima, npr. u igri lota rijetko tko će zaokružiti brojeve 1, 2, 3, 4, 5, 6 iako ova kombinacija ima jednaku vjerojatnost pojavljivanja kao i bilo koja druga, npr. 4, 13, 28, 31, 45, 47.

- Često smatramo da će se kod velikog broja pokušaja 'jednake šanse' izjednačiti prema broju ishoda.

- Ako npr. dvojica ljudi igraju igru bacanja novca, jedan igra na 'pismo', drugi na 'glavu', onda prema ovom pogrešnom stanovištu smatramo da u 10 bacanja ne ispadne točno 5 puta pismo i 5 puta glava, ali da će se npr. u 10 000 bacanja broj glava i pisama praktički izjednačiti.

- No, najvjerojatnije će se dogoditi upravo obratno, tj. apsolutna razlika između ove dvije osobe će vjerojatno postajati sve veća, a smanjivat će se jedino razlika u proporciji, tj. što je veći broj bacanja, to će postotak ishoda glava- pismo biti bliže odnosu 50:50.

10 bacanja:
4 puta glava: proporcija(G)=0,4
apsolutna razlika od očekivanog broja=1 (5-4)

200 bacanja:
85 puta glava: p(G)= 85/200 = 0,425
apsolutna razlika=15 (100-85)

1 000 bacanja:
480 puta glava: p(G=480/1000=0,48
apsolutna razlika=20 (500-480)