SVEUČILIŠTE U RIJECI
UČITELJSKI FAKULTET U RIJECI
ODSJEK ZA UČITELJSKI STUDIJ U GOSPIĆU

MATEMATIKA I

Skupovi, funkcije, brojevi

mr.sc. TATJANA STANIN

2009.

Kratak pregled predavanja koja se izvode na učiteljskom studiju Sveučilišta u Rijeci, Odsjek u Gospiću iz kolegija Matematika I (3. semestar)

PREDGOVOR

Zahvaljujući suvremenim tehnologijama, naročito internetu, u mogućnosti smo ostvariti bolju komunikaciju na svim nivoima. To je naročito važno u nastavnom procesu. Zato sam odlučila gradivo matematike predviđeno nastavnim programom trećeg semestra iz kolegija Matematika I na učiteljskom studiju približiti studentima u elektroničkom obliku, dostupnom na fakultetskim stranicama.

Gradivo je izloženo u osam poglavlja, pri čemu se prva tri poglavlja bave skupovima, relacijama i funkcijama, dok ostala poglavlja obrađuju skupove brojeva, od prirodnih do kompleksnih brojeva. Gradivo sam nastojala detaljno raščlaniti kako bi studenti imali jasan uvid u pojmove i svojstva koja se obrađuju. Pri tom sam željela biti što konciznija. Zato su neki dokazi izostavljeni, ali je naveden izvor u kojem se mogu naći.

Materijal sadrži jednostavne primjere kojima se potkrepljuju matematičke zakonitosti. Također sadrži neriješene primjere koje studenti samostalno rješavaju. Složeniji zadaci rješavaju se na vježbama koje prate predavanja.

Nadam se da će ovaj materijal olakšati studentima praćenje nastave i omogućiti kvalitetniju pripremu za kolokvije i ispit. U tu svrhu, odmah na početku, uz osnovne karakteristike kolegija dani su očekivani ishodi učenja za svako poglavlje. Izloženo gradivo usko je vezano s gradivom matematike u razrednoj nastavi te materijal može poslužiti kao podsjetnik sadašnjim i budućim učiteljima.

Zahvaljujem recenzenticama mr.sc. Katici Jurasić i mr.sc. Ljubici Štambuk na spremnosti da pregledaju moj rad i pomognu mi svojim stručnim savjetima u njegovom oblikovanju. Ugodna mi je dužnost zahvaliti kolegama sa Odsjeka u Gospiću, prvenstveno dr.sc. Vesni Grahovac-Pražić na lekturi teksta te Zvonomiru Adamoviću i Dubravki Čanić na informatičkoj podršci.

Kolegij: **MATEMATIKA I**

Studij: **Preddiplomski studij**

Semestar: **III**

Sati nastave: **2+2+0**

ECTS bodovi: 5

Redni broj poglavlja	**OČEKIVANI ISHODI**
1.	Primijeniti operacije sa skupovima. Prikazati skupove Venn-ovim dijagramima. Objasniti svojstva operacija sa skupovima, partitivni skup i particiju skupa.
2.	Analizom utvrditi vrstu relacije. Iz relacije ekvivalencije izvesti particiju skupa i obratno.
3.	Definirati funkciju. Analizom utvrditi vrstu funkcije. Izvršiti kompoziciju funkcija. Iz zadane funkcije izvesti inverznu funkciju.
4.	Opisati pojam prirodnog broja i pojam niza prirodnih brojeva. Primijeniti matematičku indukciju na tvrdnje o prirodnim brojevima. Definirati zbrajanje i množenje prirodnih brojeva i zakone koji za te operacije vrijede. Provesti jednostavnije dokaze. Zapisati prirodan broj u sustavima različitih baza. Definirati djeljivost, proste i složene brojeve. Naći zajedničke mjere i višekratnike brojeva.
5.	Opisati skup cijelih brojeva. Definirati operaciju oduzimanja.
6.	Definirati racionalne brojeve. Opisati polje racionalnih brojeva. Definirati operaciju dijeljenja. Prevesti decimalan zapis racionalnog broja u razlomak i obrnuto.
7.	Dati strogi i intuitivni opis realnih brojeva. Primijeniti zapis pomoću intervala na podskupove realnih brojeva. Pridružiti točki pravca realan broj i obratno. Provesti jednostavnije dokaze tvrdnji o iracionalnim brojevima.
8.	Primijeniti osnovne računske operacije s kompleksnim brojevima. Grafički prikazati kompleksne brojeve u kompleksnoj ravnini. Provesti prijelaz kompleksnog broja u trigonometrijski oblik. Izračunati korijene iz kompleksnog broja.

SADRŽAJ

Stranica

1. SKUPOVI

1.1. Pojam skupa

Pojam skupa se ne definira. Na pitanje što je skup, navode se primjeri da se vidi što se pod tim pojmom podrazumijeva. Na primjer: Učenici jednog razreda. Sve točke na nekom pravcu. Svi prirodni i umjetni sateliti Zemlje.

Svaki skup sačinjavaju objekti a, b, c,… koji imaju neko zajedničko obilježje. Pritom su a, b, c,… elementi ili članovi skupa. Skupove označavamo s A, B, C, S, U, Z, N, ... Ako želimo istaknuti elemente a, b, c,… skupa A, onda koristimo oznaku **A = {a,b,c,…}**.

Zapis $\mathbf{x \in S}$ znači da je x element skupa S. Ako x ne pripada skupu S koristimo oznaku $\mathbf{x \notin S}$.

Za skup kažemo da je dobro definiran (određen) ako za svaki objekt možemo utvrditi je li element tog skupa ili nije.

Primjer. Da li je skup zanimljivih figura dobro definiran skup?

Odgovor: Nije, jer nisu svim ljudima iste figure zanimljive.

1.2. Zadavanje skupova

1. Skup zadajemo tako da navedemo sve njegove elemente.

   Primjer. Elementi skupa S su brojevi 2, 3, 4, 5 i 6 ili S = { 2,3,4,5,6 }.

2. Skup zadajemo tako da navedemo obilježje koje imaju elementi skupa.

   Primjer. Elementi skupa A su svi trokuti ili A = {x | x je trokut}.
   Simbol | čita se „takvih da“.

3. Skup zadajemo tako da navedemo uvjet (ili uvjete) koji zadovoljavaju svi elementi skupa. Općenito, ako elementi skupa S zadovoljavaju uvjet U, skup S ćemo izraziti S = { x | U }.

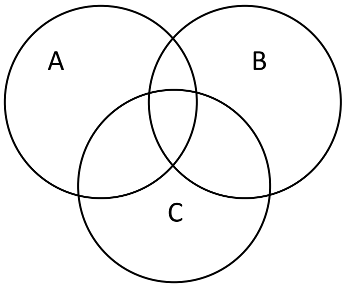
   Primjer 1. Q je skup svih razlomaka takvih da je m element skupa cijelih brojeva Z, a n element skupa prirodnih brojeva N ili
   $$Q = \{ \frac{m}{n} \mid m \in Z, n \in N \}.$$
   Primjer 2. Skup S = { 2,3,4,5,6 } može se izraziti i ovako:
   $$S = \{ x \in N \mid 2x+3 \geq 7 \text{ i } 3x-1 \leq 18 \}.$$

4. Ø je simbol za prazan skup. Prazan skup je skup koji nema ni jednog elementa.

   Na primjer: Skup svih realnih rješenja jednadžbe $x^2 = -1$. Skup svih zajedničkih točaka dva paralelna pravca. Skup svih ljudi visokih 4 m.

Prazan skup možemo definirati ovako: $\emptyset = \{x \mid x \neq x\}$.

5. Zorno prikazivanje skupova pomoću Vennovih dijagrama. sl. 1.

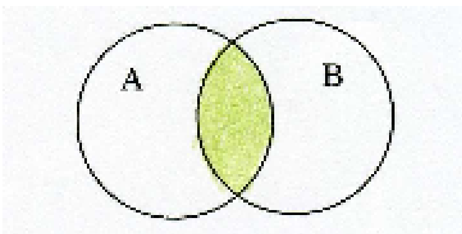


sl. 1

1.3. Presjek skupova

Presjek ili zajednički dio skupova A i B je skup koji čine svi elementi koji su i u skupu A i u skupu B. Označavamo ga $A \cap B$.

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$. sl. 2.

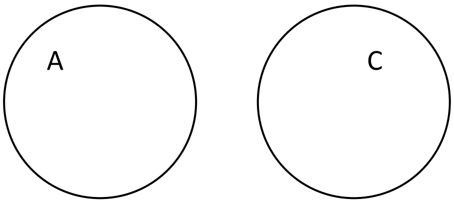


sl. 2

Primjer. Zadani su skupovi $A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,3\}$ i $C = \{0,4\}$. Treba naći $A \cap B$ i $A \cap C$.

Rješenje: $A \cap B = \{3\}$, a $A \cap C = \emptyset$.

Ako je presjek skupova prazan skup, tada kažemo da su oni **disjunktni.** Prema tome, A i C su disjunktni skupovi. sl. 3.

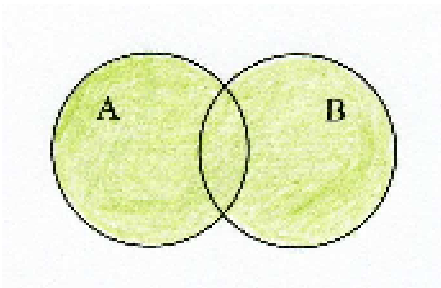


sl. 3

1.4. Unija skupova

Unija skupova A i B je skup koji čine svi elementi koji pripadaju barem jednom od skupova A i B.

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$. sl. 4.

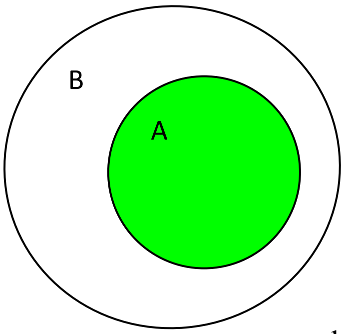


sl. 4

Primjer. Neka su skupovi $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{2,3,4,5\}$. Tada je $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$.

1.5. Podskup

Za skup A kažemo da je podskup skupa B i pišemo $A \subseteq B$, onda i samo onda, ako je svaki element iz A ujedno i element iz B, tj. ako je $A \cap B = A$. sl. 5.



sl. 5

Za skup A kažemo da je pravi podskup od B i pišemo $A \subset B$ onda i samo onda, ako je svaki element iz A ujedno i element iz B pri čemu je kardinalni broj skupa A manji od kardinalnog broja skupa B, tj. $kA < kB$.

Primjer. Ako su zadani skupovi $A = \{1,2\}$ i $B = \{1,2,3\}$, A je podskup od B, $A \subseteq B$. Štoviše, A je pravi podskup od B, što pišemo $A \subset B$. Također vrijedi da je $B \subseteq B$, tj. svaki je skup sam sebi podskup.

Nadalje, za svaki skup S vrijedi da je $S \cap \emptyset = \emptyset$. Odatle zaključujemo da je prazan skup podskup svakog skupa.

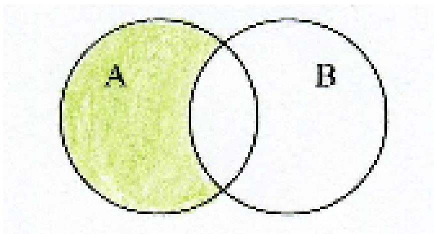
1.6. Jednakost skupova

Za skupove A i B kažemo da su jednaki i pišemo $A = B$ onda i samo onda ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, tj. ako je svaki element iz A ujedno i element iz B, i obratno, svaki element iz B je ujedno i element iz A.

1.7. Diferencija skupova

Skup svih elemenata iz A koji nisu i u B nazivamo diferencijom skupova A i B i označavamo $A \setminus B$.

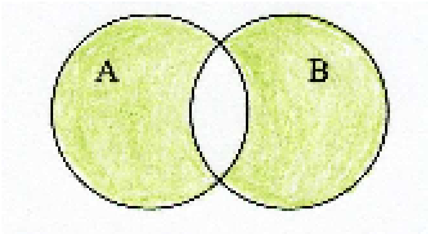
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$. sl. 6.



sl. 6

Primjer. Ako su skupovi $A = \{2,3,4\}$ i $B = \{1,2\}$, tada je $A \setminus B = \{3,4\}$, a $B \setminus A = \{1\}$.

Skup $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ zove se **simetrična diferencija**. Prikaz simetrične diferencije pomoću Vennovog dijagrama sl. 7.



sl. 7

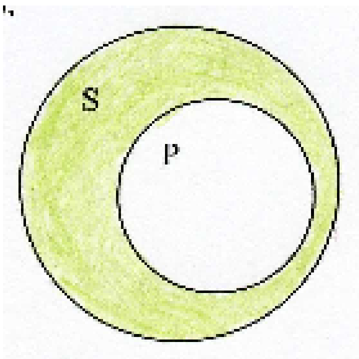
Zadaci za vježbu

Obrazložite sljedeće jednakosti:

1. $A \setminus \emptyset = A$
2. $\emptyset \setminus A = \emptyset$
3. $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$.

1.8. Pojam komplementa. Univerzalni skup.

Neka je P podskup skupa S. Skup $S \setminus P$ zove se komplement od P u odnosu na S i označava $C_S(P)$. sl. 8.

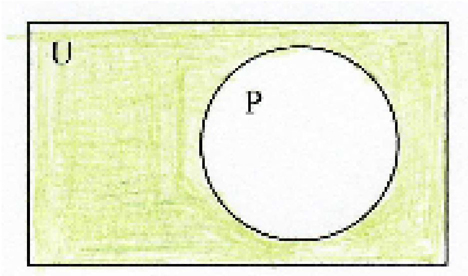


sl. 8

Primjer. Ako je $S = \{1,2,3,4\}$ i $P = \{1,2\}$, tada je $C_S(P) = \{3,4\}$.

Ako je $P = \emptyset$, tada je $C_S(P) = S$.

U slučajevima kada je iz konteksta jasno da je S skup, umjesto $C_S(P)$ pišemo C(P) ili P^C. Skup S obično je tada neki obuhvatniji skup koji razmatramo pa se kao takav zove **univerzalni skup** i označava s U. Njega obično predočavamo pravokutnikom, a njegove podskupove krugovima. sl. 9.



sl. 9

1.9. Svojstva presjeka, unije i diferencije (komplementa)

1. Komutativnost

$A \cap B = B \cap A$

$A \cup B = B \cup A$

2. Asocijativnost

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3. Idempotentnost

$A \cap A = A$

$A \cup A = A$

4. Distributivnost

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

5. Svojstva praznog i univerzalnog skupa

$A \cap \emptyset = \emptyset$

$A \cap U = A$

$A \cup U = U$

$A \cup \emptyset = A$

6. De Morganovi zakoni

   $(A \bigcup B)^C = A^C \cap B^C$

   $(A \cap B)^C = A^C \bigcup B^C$

7. Involucija

   $(A^C)^C = A$

Valjanost ovih zakonitosti može se provjeriti Vennovim dijagramima, ali i dokazati pomoću operacija koje smo ranije definirali. Za primjer dokažimo De Morganov zakon $(A \bigcup B)^C = A^C \cap B^C$.

$$
\begin{aligned}
(A \bigcup B)^C &= \{x \mid x \in U \setminus (A \bigcup B)\} \\
&= \{x \mid x \in U \text{ i } x \notin (A \bigcup B)\} \\
&= \{x \mid x \in U \text{ i } (x \notin A \text{ i } x \notin B)\} \\
&= \{x \mid (x \in U \text{ i } x \notin A) \text{ i } (x \in U \text{ i } x \notin B)\} \\
&= \{x \mid (x \in U \setminus A) \text{ i } (x \in U \setminus B)\} \\
&= \{x \mid (x \in A^C) \text{ i } (x \in B^C)\} \\
&= \{x \mid x \in (A^C \cap B^C)\} \\
&= A^C \cap B^C
\end{aligned}
$$

1.10. Kardinalni broj skupa

Broj elemenata n skupa S definiramo kao **kardinalni broj** skupa S i označavamo **kS = n.**

Primjer. Kardinalni broj skupa S = {1,2,3,4} je kS = 4.

1.11. Partitivni skup

Neka je S bilo koji dani skup. Skup svih podskupova od S nazivamo partitivnim skupom skupa S i označavamo *P*(S).

Primjer. Ako je S = {1,2,3}, onda je partitivni skup

P(S) = {Ø ,{1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3}}.

Ako je kardinalni broj skupa S jednak n, tj. kS = n, tada je kardinalan broj partitivnog skupa kP(S) = 2^n.

Primjer 1. Kardinalni broj partitivnog skupa skupa S = {1,2,3} je kP(S) = $2^3 = 8$.

Primjer 2. Kardinalni broj partitivnog skupa skupa T ={a,b,c,d} je kP(T) = $2^4 = 16$.

1.12. Particija skupa

Neka je S bilo koji dani skup. Svaki podskup $\mathscr{P}$ od P(S)\{Ø} zovemo particijom ili disjunktnim rastavljanjem skupa S ako su ispunjena ova dva uvjeta:

1. Unija svih elemenata iz $\mathscr{P}$ je S;
2. Ako su A i B različiti elementi iz $\mathscr{P}$ tada je A∩B = Ø.

Primjer. Jedna particija skupa S = {1,2,3,4,5,6,7} je $\mathscr{P}$= {{1}, {2}, {3,4,5},{6,7}}, jer je

1. {1} ∪ {2} ∪ {3,4,5} ∪ {6,7} = S
2. {1}∩ {2}∩ {3,4,5}∩{6,7} = Ø.

Zadatak za vježbu

Navedite još nekoliko particija skupa S iz prethodnog primjera.

1.13. Kartezijev ili direktni produkt skupova

Ako su A i B skupovi, tada skup svih parova (a,b) kod kojih je $a \in A$ i $b \in B$ nazivamo kartezijevim ili direktnim produktom i označavamo $A \times B$, tj.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ i } b \in B\}.$$

Primjer 1. Zadani su skupovi A = {1,2,3} i B = {x,y}. Nađite kartezijeve produkte $A \times B$ i $B \times A$ skupova A i B.

Rješenje. $A \times B$ = {(1,x), (1,y), (2,x), (2,y), (3,x), (3,y)}

$B \times A$ = {(x,1), (x,2), (x,3), (y,1), (y,2), (y,3)}

Primijetimo da je $A \times B \neq B \times A$ jer se sastoje od različitih uređenih parova. (1,x) ≠ (x,1), (2,x) ≠ (x,2), itd.

Primjer 2. Neka su skupovi A = {a,b}, B = {x,y} i C = {c}.

Odredite $A \times B \times C$!

Rješenje. $A \times B \times C = \{(a,x,c), (a,y,c), (b,x,c) (b,y,c)\}$.

Elementi kartezijevog produkta su u ovom slučaju uređene trojke brojeva.

Primjer 3. Ako je $A = \{0,1\}$, odredite $A \times A$ i $A \times A \times A$!

Rješenje. $A \times A = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$A \times A \times A = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1),(1,1,1)\}$

2. RELACIJE

2.1. Binarne relacije

Neka su A i B neki skupovi, a **ρ** neki podskup od $A \times B$, $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times B$. Skup **ρ** zove se relacija između elemenata skupa A i elemenata skupa B ili relacija s A u B.

Za element x iz A kažemo da je u relaciji **ρ** s elementom y iz B i pišemo $x\boldsymbol{\rho}y$, onda i samo onda ako je $(x,y) \in \boldsymbol{\rho}$.

Primjer 1. Zadani su skupovi A = {1,2,3,4} i B = {7,8,9}. Jedna relacija **ρ** sa A u B je **ρ** = {(1,7), (2,9), (3,8), (4,7)}.

Možemo reći da je 1 u relaciji sa 7, 2 sa 9, itd. To pišemo $1\boldsymbol{\rho}7$, $2\boldsymbol{\rho}9$, $3\boldsymbol{\rho}8$, $4\boldsymbol{\rho}7$.

Također možemo reći da je uređen par (1,7) element relacije **ρ,** što pišemo $(1,7) \in \boldsymbol{\rho}$, $(2,9) \in \boldsymbol{\rho}$, itd.

Primjer 2. Kada definiramo relaciju može biti da je A = B. Tada govorimo o relaciji u A ili o relaciji s A u A.

Neka je A = {1,2,3,4} i neka je relacija u tom skupu zadana rečenicom: Element x iz A manji je od elementa y iz A. Napišite tu relaciju!

Rješenje. **ρ** = {(1,2), (1,3), (1,4), (2,3), (2,4), (3,4)}.

2.2. Neke važnije vrste binarnih relacija

a) Refleksivne relacije

Za relaciju $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times A$ kažemo da je refleksivna onda i samo onda ako je $a\boldsymbol{\rho}a$ za svaki $a \in A$.

Primjer 1. Relacija | „biti divizor“ u skupu N je refleksivna relacija, jer je svaki prirodan broj divizor sam sebi, tj. $a \mid a$ za svaki $a \in N$.

Primjer 2. Da li je relacija < „biti manji“ u skupu N refleksivna relacija? Uzmimo neki broj $a \in N$, da li vrijedi da je $a < a$? Zaključujemo da to ne vrijedi i da „biti manji“ nije refleksivna relacija.

b) Simetrične relacije

Za relaciju $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times A$ kažemo da je simetrična onda i samo onda ako ima svojstvo: ako je $a\boldsymbol{\rho}b$ tada je i $b\boldsymbol{\rho}a$.

Primjer 1. Relacija ~ „biti sličan sa“ u skupu svih trokuta je simetrična relacija, jer ako je $a \sim b$ tada je i $b \sim a$.

c) Tranzitivne relacije
Za relaciju $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times A$ kažemo da je tranzitivna onda i samo onda ako ima svojstvo: ako je $a\boldsymbol{\rho}b$ i $b\boldsymbol{\rho}c$, tada je $a\boldsymbol{\rho}c$.

Primjer 1. Relacija || „biti paralelan sa“ u skupu svih pravaca je tranzitivna relacija, jer ako je a||b i b||c, tada je i a||c.

Primjer 2. Relacija $\perp$ „biti okomit na“ u skupu svih pravaca nije tranzitivna, jer ako je $a \perp b$ i $b \perp c$, tada je a||c.

d) Antisimetrične relacije
Za relaciju $\boldsymbol{\rho} \subseteq A \times A$ kažemo da je antisimetrična onda i samo onda ako ima svojstvo: ako je $a\boldsymbol{\rho}b$ i $b\boldsymbol{\rho}a$, tada je a = b.

Primjer 1. Relacija | „biti divizor“ u skupu N je antisimetrična relacija, jer iz a|b i b|a slijedi da je a=b.

2.3. Relacija ekvivalencije

Posebno važne su one relacije koje su refleksivne, simetrične i tranzitivne. Takve relacije zovemo **relacije ekvivalencije.**

Primjer 1. Relacija ~ „biti sličan sa“ u skupu svih trokuta je relacija ekvivalencije.

Rješenje. Dovoljno je pokazati da je zadana relacija refleksivna, simetrična i tranzitivna.

1. Refleksivna: Svaki je trokut sličan sam sebi.
2. Simetrična: Ako je trokut ABC sličan trokutu DEF, tada je i trokut DEF sličan trokutu ABC.
3. Tranzitivna: Ako je trokut ABC sličan trokutu DEF, a trokut DEF sličan trokutu GHI, tada je i trokut ABC sličan trokutu GHI.

Zadatak za vježbu

1. Dokažite da je relacija || „biti paralelan sa“ u skupu svih pravaca relacija ekvivalencije.

Teorem 1. Svaka relacija ekvivalencije definirana u skupu A rastavlja skupa A na disjunktne podskupove koji su klase ekvivalentnih elemenata s obzirom na danu relaciju ekvivalencije.

Teorem 2. (Obrat teorema 1) Svako disjunktno rastavljanje skupa A određuje u A relaciju ekvivalencije.[1]

[1] Dokaze ovih teorema ćemo izostaviti. Pogledati u: Radić, M., *Algebra I*, Školska knjiga, Zagreb, 1984.

Primjer 3. Neka je R_5 relacija u skupu cijelih brojeva Z definirana ovako **$x \equiv y \pmod 5$**.

To čitamo**:** x kongruentno s y modulo 5, a to znači da je razlika x – y djeljiva s 5. Treba pokazati da je R_5 relacija ekvivalencije.

$R_5 = \{(a,b) \in ZxZ \mid (a\text{-}b) \text{ djeljivo s } 5\}$.

$Z = \{\ldots,-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,\ldots\}$

A_0 je podskup od Z kojemu su elementi oni brojevi iz Z koji, kad ih podijelimo s 5, imaju ostatak 0, A_1 je podskup od Z kojemu su elementi oni brojevi iz Z koji, kad ih podijelimo s 5, imaju ostatak 1, A_2 je podskup od Z kojemu su elementi oni brojevi iz Z koji, kad ih podijelimo s 5, imaju ostatak 2, itd.

$A_0 = \{\ldots,-10, -5, 0, 5, 10, 15,\ldots\}$

$A_1 = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16\ldots\}$

$A_2 = \{\ldots,-8, -3, 2, 7, 12, 17,\ldots\}$

$A_3 = \{\ldots,-7, -2, 3, 8, 13, 18,\ldots\}$

$A_4 = \{\ldots,-6, -1, 4, 9, 14, 19,\ldots\}$.

Vidimo da je $\quad A_0 \cap A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$,

i da je $\quad A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = Z$.

Zaključujemo da relacija R_5 vrši particiju skupa Z pa je to relacija ekvivalencije.

2.4. Uređajne relacije

Relacija $R \subseteq S \times S$ zove se relacija parcijalnog uređenja skupa S, a skup S parcijalno uređenim skupom s obzirom na tu relaciju ako je R refleksivna, tranzitivna i antisimetrična.

Primjer 1. Relacija $\subseteq$ „biti podskup od“ u partitivnom skupu *P*(S) je relacija parcijalnog uređenja skupa *P*(S). Pokažimo to!

Rješenje. Dovoljno je pokazati da je zadana relacija refleksivna, tranzitivna i antisimetrična.

1. refleksivnost: $A \subseteq A$, za svaki $A \in P(S)$.

2. tranzitivnost: $A \subseteq B$ i $B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$, za sve A, B i C iz $P(S)$.

3. antisimetričnost: $A \subseteq B$ i $B \subseteq A \Rightarrow A = B$, za A i B iz $P(S)$.

Relacija parcijalnog uređenja najčešće se označava s $\leq$. Za elemente a i b iz S kažemo da su usporedivi s obzirom na relaciju $\leq$ onda i samo onda ako je $a \leq b$ ili $b \leq a$. Razumije se da ne moraju svi parovi elemenata iz S biti usporedivi s obzirom na relaciju $\leq$ (zato se ovo uređenje i naziva parcijalnim uređenjem skupa).

Definicija. Parcijalno uređen skup u kojemu su svaka dva elementa usporediva zove se linearno ili potpuno uređen skup. Relacija $\leq$ zove se tada relacija potpunog uređenja tog skupa.

Primjer 2. Relacija $\leq$ u skupu N je relacija potpunog uređenja skupa N, jer za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi $a \leq b$ ili $b \leq a$.

Zadatak za vježbu

Pokažite da je relacija | „biti divizor" u skupu N, relacija parcijalnog uređenja.

2.5. Inverzna relacija

Neka su A i B neki skupovi, a R neka relacija sa A u B, $R \subseteq A \times B$. Definirajmo R^{-1} ovako: ako je xRy, onda je $yR^{-1}x$.

R^{-1} je tada inverzna relacija od R, ili invers od R.

Primjer 1. Zadana je relacija $R \subseteq A \times B$, pri čemu je A=$\{1,2,3\}$ i B=$\{5,6\}$,

R=$\{(1,5), (1,6), (2,6), (3,6)\}$.

Njoj inverzna relacija R^{-1} je $R^{-1} = \{(5,1), (6,1), (6,2), (6,3)\}$.

Primjer 2. Relacija „biti divizor" u skupu prirodnih brojeva N inverzna je relacija relaciji „biti djeljiv sa" u tom skupu.

3. FUNKCIJE

3.1. Definicija funkcije

Neka su A i B dani skupovi. Ako svakom elementu iz A pridružimo jedan i samo jedan element iz B, tada kažemo da smo skup A preslikali u B, a sam postupak pridruživanja nazivamo funkcijom sa A u B.

Pišemo: $A \xrightarrow{f} B$ ili $f : A \to B$, a čitamo: f je preslikavanje sa A u B.

Skup A zovemo domenom, a skup B kodomenom funkcije $f : A \to B$.

Element skupa B koji je pridružen elementu x iz A označavamo s **f(x)** i zovemo **slikom elementa x** u odnosu prema preslikavanju f. **f(x)** još se zove **vrijednost funkcije**.

3.2. Analitičko zadavanje funkcija

Ako je funkcija izražena formulom kažemo da je ona zadana analitički. Uzmimo da funkcija f sa R u R, pridružuje svakom broju njegov kvadrat, onda to možemo pisati ovako:

$$f(x) = x^2 \qquad \text{ili} \qquad x \mapsto x^2 \qquad \text{ili} \qquad y = x^2 .$$

Pri tom se x naziva nezavisna varijabla, dok je y zavisna varijabla.

Primjer 1. Izrazite funkciju g: $R \to R$ koja svakom broju pridružuje njegov kub. Odredite sliku broja 2, zatim sliku od a i sliku od (c+1).

Rješenje: $g(x) = x^3$ ili $x \mapsto x^3$ ili $y = x^3$.

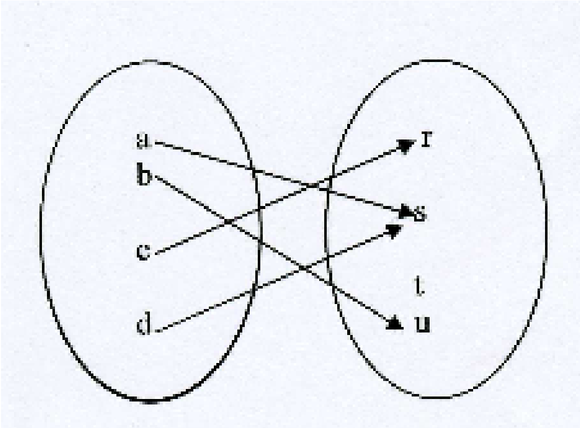
$$g(2) = 2^3 = 8 , \quad g(a) = a^3 , \quad g(c+1) = (c+1)^3 .$$

Zadaci za vježbu

1. Neka f pridružuje svakoj zemlji svijeta njezin glavni grad. Što je domena, a što kodomena ove funkcije? Što je slika Francuske?

2. Na slici je dana funkcija f sa A u B, pri čemu je A = {a,b,c,d} i B = {r,s,t,u}. Odredite f(a), f(b), f(c) i f(d). Što je domena, a što kodomena ove funkcije? Odredite skup vrijednosti funkcije ili skup slika. sl. 10.

◄



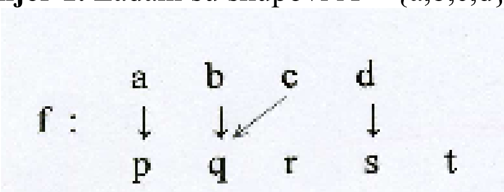
sl. 10

3.3. Graf funkcije

Pod grafom funkcije f: A$\rightarrow$B podrazumijevamo skup Γ definiran ovako:

$$\Gamma = \{(a,b) | \, a \in A, \, b=f(a)\}$$

Primjer 1. Zadani su skupovi A = {a,b,c,d} i B = {p,q r,s,t}. Neka je funkcija f: A$\rightarrow$B



Tada graf funkcije f glasi: Γ = {(a,p), (b,q), (c,q), (d,s)}.

Graf funkcije ima svojstva:
1. Za svaki $a \in A$ postoji $b \in B$ tako da je $(a,b) \in \Gamma$.
2. Nijedna dva različita para iz Γ nemaju prvu koordinatu jednaku.

Primjer 2. Koji od skupova Γ_1 i Γ_2 nije graf neke funkcije s A u B, pri čemu je A = {1,2,3,4} i B = {a,b,c}?

$$\Gamma_1 = \{(1,b), (2,a), (3,b), (4,b)\}$$
$$\Gamma_2 = \{(1,b), (1,a), (3,b), (4,b)\}.$$

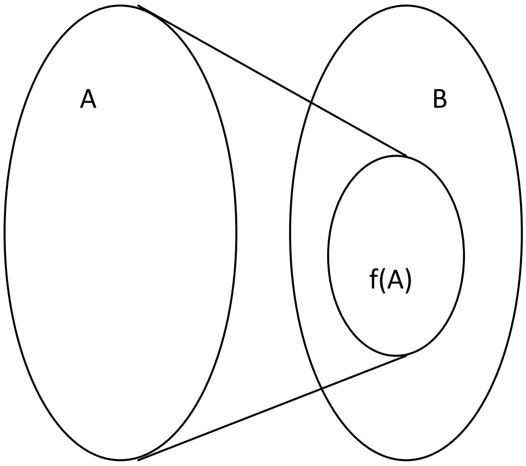
Odgovor: Γ_2 nije graf funkcije jer nema ni 1. ni 2. svojstvo. (2 nije prva koordinata niti jednog para i dva para, (1,b) i (1,a), imaju jednaku prvu koordinatu.

Svojstvo 1 i svojstvo 2 može se zajedno izraziti i ovako:

Za svaki $a \in A$ postoji jedan i samo jedan $b \in B$ tako da je $(a,b) \in \Gamma$.

3.4. Područje vrijednosti funkcije

Skup svih elemenata iz B koji su slika barem jednog elementa iz A označava se **f(A)** i zove **područje vrijednosti funkcije** f: A→B. sl. 11.



sl. 11

Primjer. Ako je f: N→Z definirana s f(x) = 2x-1, tada je f(N) = {1,3,5,...}.Vidimo da je f(N) $\subset$ Z.

3.5. Surjektivna preslikavanja ili surjekcije

Funkciju f: A→B kod koje je f(A) = B zovemo surjektivnim preslikavanjem ili surjekcijom.

Drugim riječima, svaki element iz B je slika barem jednog elementa iz A pa kažemo da funkcija f preslikava A na čitav B ili kraće na B.

Primjer 1. Neka je A = {1,2,3,4} i B = {5,6,7} i neka je zadana funkcija f: A→B ovako:

$$f:\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 6 & 5 & 7 \end{array}$$

Budući je svaki element iz B slika barem jednog elementa iz A, funkcija f je surjekcija.

Zadatak za vježbu

Neka je dano preslikavanje g: N→Z ovako:

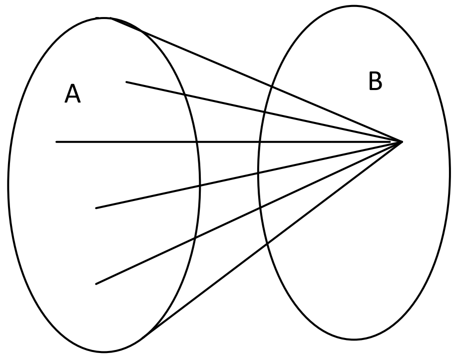
$$g:\ \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & \ldots \end{array}$$

Je li g surjekcija?

Napišite još nekoliko surjekcija s N u Z!

3.6. Konstante

Za preslikavanje f: $A \rightarrow B$ kažemo da je konstanta onda i samo onda ako je f(A) jednočlan skup, tj. ako se svaki element iz A preslikava u jedan te isti element iz B. sl. 12.



sl. 12

Zadaci za vježbu

1. Neka je A skup svih kružnica, a B skup svih realnih brojeva. Preslikavanje f: $A \rightarrow B$ koje svakoj kružnici pridružuje omjer njezinog opsega i njezinog promjera je konstanta $f(x) = \pi$. Pokažite to!

2. Neka je A = B = R, a funkcija f: $R \rightarrow R$ određena formulom $f(x) = 4$ za svaki x iz R. Da li je to konstanta? Prikažite grafički funkciju f!

3.7. Identično preslikavanje

Preslikavanje f: $A \rightarrow A$ zove se identično preslikavanje skupa A onda i samo onda ako je $f(x) = x$ za svaki x iz A.

Zadatak za vježbu

Neka je A = R. Preslikavanje f: $R \rightarrow R$ dano s $f(x) = x$ možemo predočiti pravcem u koordinatnoj ravnini. Skicirajte ga!

3.8. Injektivna preslikavanja ili injekcije

Za preslikavanje f:$A \rightarrow B$ kažemo da je injektivno preslikavanje ili injekcija skupa A u skup B onda i samo onda ako se različiti elementi iz A preslikavaju u različite elemente iz B, tj. ako je svaki element iz B slika najviše jednog elementa iz A.

Jednakost $f(a) = f(b)$ moguća je, dakle, samo za $a = b$. Za $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ za svaki par elemenata a i b iz A.

Primjer. Zadana je funkcija f: A $\rightarrow$B. Pri tom je A = {1,2,3,4} i
B = {a,b,c,d,e,f}.

$$f: \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ b & d & a & f & c & e \end{array}$$

Budući se različiti elementi preslikavaju u različite, f je injekcija.

Zadatak za vježbu

Napišite još nekoliko injektivnih preslikavanja s A u B, pri čemu je A = {1,2,3,4} i
B = {a,b,c,d,e,f}.

3.9. Obostrano jednoznačno ili bijektivno preslikavanje

Definicija 1. Za preslikavanje f: A$\rightarrow$B kažemo da je bijektivno ili obostrano jednoznačno onda i samo onda ako je to istovremeno i injektivno i surjektivno preslikavanje skupa A u skup B.

Definicija 2. Za preslikavanje f: A$\rightarrow$B kažemo da je bijektivno ili obostrano jednoznačno onda i samo onda ako je to injektivno preslikavanje skupa A na skup B.

Definicija 3. Svaki element iz B je slika jednog i samo jednog elementa iz A.

Primjer. Neka su zadani skupovi A i B i preslikavanje f sa A u B ovako:
A = {1,2,3,4}, B = {a,b,c,d,} i f = {(1,b),(2,c),(3,d),(4,a)}. Da li je f bijekcija?

Odgovor: Svaki element iz B je slika nekog elementa iz A pa je f surjekcija. Različiti elementi iz A preslikavaju se u različite elemente iz B pa je f injekcija. Odatle slijedi da je f bijekcija.

Zadatak za vježbu

Navedite još nekoliko bijekcija s A u B, pri čemu je A = {1,2,3,4} i B = {a,b,c,d,}.

3.10. Inverzno preslikavanje

Neka je f: A$\rightarrow$B bijektivno preslikavanje. Definirajmo preslikavanje f^{-1}: B$\rightarrow$A ovako: Ako je f(x) = y, tada je $f^{-1}(y) = x$.

Drugim riječima: svakom elementu y iz B pridružuje se onaj element iz A koji se preslikava u y.

Primjer 1. Neka je f: A$\rightarrow$B, pri čemu je A = {a,b,c} i B = {p,q,r}
f = {(a,p), (b,q), (c,r)}. Tada je inverzno preslikavanje ili invers
f^{-1}: B$\rightarrow$A , f^{-1} = {(p,a), (q,b), (r,c)}.

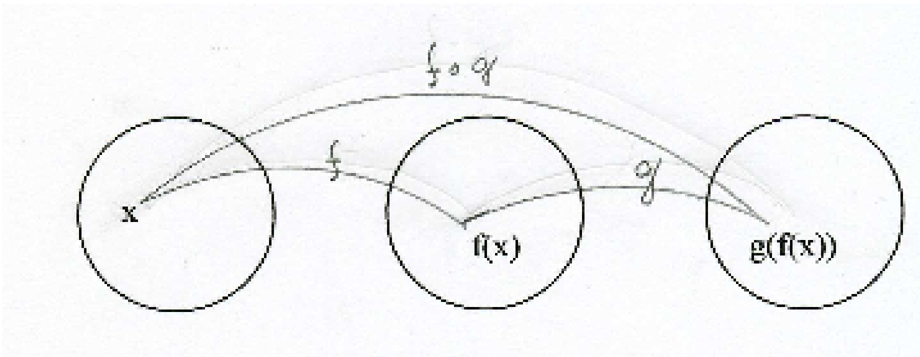
Očito je da vrijedi $(f^{-1})^{-1} = f$.

Zadatak za vježbu

Neka je $A = \{x \mid 4 \le x \le 5\}$ i $B = \{y \mid 7 \le y \le 9\}$. Preslikavanje f: $A \to B$ određeno je sa $f(x) = 2x-1$. Odredite $f^{-1}(x)$. Skicirajte grafove funkcija f i f^{-1}!

3.11. Kompozicija preslikavanja

Neka su dana preslikavanja *f*: $A \to B$ i *g*: $B \to C$, gdje je kodomena preslikavanja *f* ujedno domena preslikavanja *g*. sl. 13.



sl. 13

Preslikavanje $g \circ f : A \to C$ definirano ovako $(g \circ f)(x) = g\,[f(x)]$ za svaki $x \in A$, zove se kompozicija preslikavanja *f* i *g*.

Primjer. Dane su funkcije f i g .

$$f : \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ r & q & p \end{array} \qquad\qquad g : \begin{array}{ccc} p & q & r \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u & v & z \end{array}$$

Odrediti $(g \circ f)(a)$, $(g \circ f)(b)$ i $(g \circ f)(c)$!

Rješenje. $(g \circ f)(a) = g\,[f(a)] = g(r) = z$
$(g \circ f)(b) = g\,[f(b)] = g(q) = v$
$(g \circ f)(c) = g\,[f(c)] = g(p) = u$

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ z & v & u \end{array}$$

Zadatak za vježbu:

Dane su funkcije f, g i h u skupu A = {1,2,3,4}.

$$f: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array} \qquad g: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{array} \qquad h: \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}$$

Nađite kompozicije: $f \circ g$, $h \circ f$, $g \circ g$.

3.12. Asocijativnost kompozicije

Ako su $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$ funkcije, tada su definirane i funkcije

$$h \circ g,\ (h \circ g) \circ f,\ g \circ f,\ h \circ (g \circ f).$$

Lako se uviđa da za komponiranje funkcija vrijedi zakon asocijacije.

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)[f(x)] = h\{g[f(x)]\}$$
$$(h \circ (g \circ f))(x) = h[(g \circ f)(x)] = h\{g[f(x)]\}$$

Primijetimo da za kompoziciju funkcija ne vrijedi zakon komutacije, tj. da ne mora biti $f \circ g = g \circ f$. Naime, domena preslikavanja $g \circ f$ jednaka je domeni preslikavanja f, a domena preslikavanja $f \circ g$ jednaka je domeni preslikavanja g. Čak i ako su one iste, ne mora vrijediti $f \circ g = g \circ f$.

4. PRIRODNI BROJEVI

4.1. Definicija skupa prirodnih brojeva

4.1.1. Ekvivalentni skupovi

Za skup A kažemo da je ekvivalentan skupu B i pišemo A~B onda i samo onda ako postoji bijekcija s A na B. Primijetimo da su A i B jednakobrojni skupovi.

Primjer .

$$\begin{array}{c} A = \{1,2,3\} \\ \downarrow\downarrow\downarrow \\ B = \{a,b,c\} \end{array}$$

Teorem. Relacija ~ „biti ekvivalentan sa" među skupovima je

1. refleksivna A~A
2. simetrična A~B i B~A
3. tranzitivna A~B i B~C $\Rightarrow$ A~C.

Dokaz. 1. Identično preslikavanje skupa A je bijekcija s A na A.

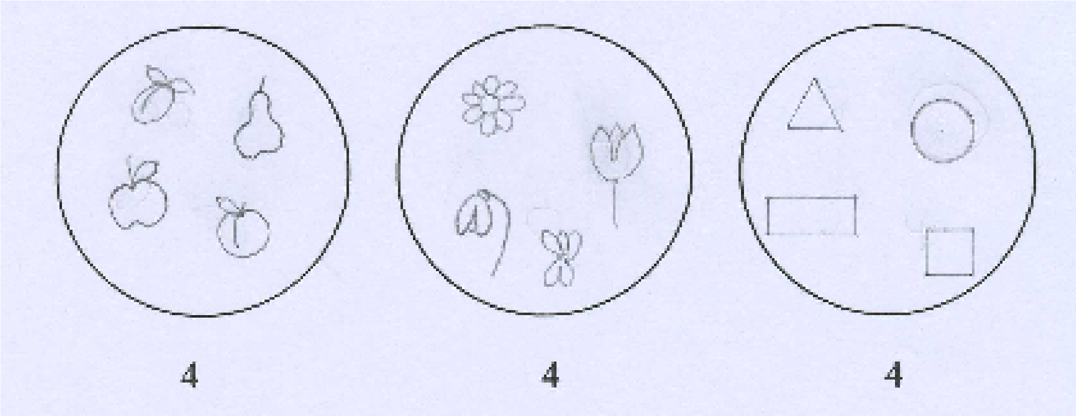
2. Ako je f bijekcija s A na B onda je f^{-1} bijekcija s B na A.

3. Ako je f bijekcija s A na B i g bijekcija s B na C, onda je kompozicija $g \circ f$ bijekcija s A na C.

Prema tome, relacija „biti ekvivalentan" je relacija ekvivalencije u svakoj familiji nepraznih skupova. Za prazni skup dogovorno se kaže da je sam sebi ekvivalentan.

Ako je relacija „biti ekvivalentan" relacija ekvivalencije, tada ona vrši particiju skupa na klase ili familije skupova.

Primjer. Na sl.14 su prikazana tri ekvivalentna skupa. Njihovo zajedničko svojstvo je da svaki ima četiri elementa. Skupova po četiri elementa ima beskonačno mnogo. Drugim riječima, njihovo zajedničko svojstvo je da imaju jednak kardinalni broj. To je broj 4.



sl. 14

Prirodni broj je zajedničko svojstvo svih ekvivalentnih skupova.

4.1.2. Definicija prirodnih brojeva

Prirodni broj se definira kao kardinalni broj konačnog skupa pa je broj 1 kardinalni broj svih jednočlanih skupova, 2 kardinalni broj svih dvočlanih skupova, itd.

Dogovorno $0 = k\,\emptyset$

$1 = k\{0\}$

$2 = k\{0,1\}$

$3 = k\{0,1,2\}$

….

Skup svih prirodnih brojeva označavamo s **N** (naturalis, lat. prirodan).

N = {1,2,3,4,…}

4.1.3. Konačni i beskonačni skupovi

Neka je S neki skup. Kažemo da je taj skup **konačan** ako postoji prirodan broj n tako da je skup {1,2,3,4,…,n} ekvivalentan skupu S. Na primjer skup S = {Zagreb, Rijeka, Gospić} je konačan jer je ekvivalentan skupu {1,2,3}.

I za Ø kaže se da je konačan (dogovorno).

Za skup koji nije konačan, kažemo da je **beskonačan.** Na primjer, skup N je beskonačan jer nije ekvivalentan skupu {1,2,3,4,…,n} ni za jedan dani prirodni broj n.

Teorem. Skup je beskonačan onda i samo onda ako se može bijektivno preslikati na svoj pravi podskup.

Dokaz.[2]

Na primjer, skup N je beskonačan jer se može bijektivno preslikati na svoj pravi podskup {2, 4, 6, 8, …}.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & \ldots \end{array}$$

Definicija. Za beskonačni skup kažemo da je **prebrojiv** onda i samo onda ako je ekvivalentan skupu N.

Na primjer, skup cijelih brojeva Z ekvivalentan je skupu N jer postoji bijekcija sa N na Z:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & \ldots \end{array}$$

Prema tome, skup cijelih brojeva Z je beskonačan i prebrojiv.

Kardinalni broj beskonačnog prebrojivog skupa označava se s $\aleph_0$. Ovaj simbol se čita alef nula. Alef je prvo slovo hebrejskog pisma.

Prije smo pokazali da je skup prirodnih brojeva N beskonačan, a kako je ekvivalentan sam sebi, onda je i prebrojiv. Odatle zaključujemo da je kN = $\aleph_0$.

Kada za neki skup S pišemo kS= $\aleph_0$, onda to zapravo znači da je skup S ekvivalentan skupu N.

4.2. Peanovi aksiomi i matematička indukcija

4.2.1. Peanovi aksiomi

Skup N čije elemente zovemo prirodnim brojevima ima ova svojstva:

1. 1 je prirodan broj, tj. $1 \in$ N.
2. Svaki prirodan broj n ima točno jednog sljedbenika n^+.

[2] Radić, M., *Algebra 1*, Teorem 9.2. i Teorem 9.3. str. 111.

3. Uvijek je $n^+ \neq 1$, tj. 1 nije sljedbenik nijednog prirodnog broja.

4. Ako je $m^+ = n^+$, tada je $m = n$, tj. ako su sljedbenici dvaju prirodnih brojeva jednaki, tada su i sami ti brojevi jednaki.

5. (Aksiom indukcije) Svaki podskup M skupa N, koji sadrži broj 1 i sljedbenika svakog svog elementa, sadrži sve prirodne brojeve, tj. M = N.

4.2.2. Matematička indukcija

Način zaključivanja u kojem promatranjem pojedinačnih slučajeva donosimo općenite zaključke zovemo indukcijom.

U mnogim znanostima zaključci doneseni na temelju razmatranja konačnog broja pojedinačnih slučajeva prihvaćaju se istinitima i ne podvrgavaju se daljnjim dokazivanjima (medicina, društvene znanosti, meteorologija, fizika, biologija, poljoprivreda, itd.).

U matematici se opća zakonitost do koje se došlo naziva **pretpostavka** ili **hipoteza**. Matematičar zna da se ona mora dokazati.

Mnogi primjeri pokazuju da pretpostavke ili hipoteze do kojih se došlo indukcijom znaju biti netočne. Zato, način zaključivanja u kojem promatranjem pojedinačnih slučajeva postavljamo opće zakonitosti zovemo **nepotpunom indukcijom.** Ona nema snagu dokaza, ali pomaže da iz posebnih slučajeva dobijemo više ili manje vjerojatne pretpostavke pa ima vrijednost i u matematičkim istraživanjima i u nastavi matematike.

U povijesti matematike poznato je više slučajeva kada su i najveći matematičari objavljivali općenite tvrdnje do kojih su došli nepotpunom indukcijom, a da nisu proveli dokaz. Samo neke od tih tvrdnji preživljavale bi strogi matematički dokaz i pokazale se istinitima.

Za neke tvrdnje do kojih se došlo nepotpunom indukcijom pronađen je **kontraprimjer.** Kontraprimjerom zovemo onaj primjer koji pokazuje da tvrdnja za koju smo mislili da vrijedi nije istinita.

Francuski matematičar P. Fermat (1601.-1665.) postavio je hipotezu da su svi brojevi oblika

$$2^{2^{n-1}}+1 \quad \text{, za svaki } n \in \mathrm{N}$$

djeljivi samo s 1 i sa samim sobom.

On je to zaključio izračunavanjem gornjeg izraza uvrštavajući za n redom brojeve 1, 2, 3 i 4 te dobio brojeve 3, 5, 17 i 257. Nakon toga odlučio je svoju slutnju provjeriti još za 5 i dobio broj 65 537, a to je također broj djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Nakon toga obznanio je zaključak da su svi brojevi koji se dobiju ovom formulom djeljivi samo s 1 i sa samim sobom.

Da je Fermat živio u sadašnjem vremenu, on tu hipotezu sigurno ne bi objavio. Jednostavnim računskim programom ispitao bi što se događa za prirodne brojeve veće od 5. Odmah za 6 bi dobio da je $2^{2^5} = 4\,294\,967\,297$, a taj broj je, osim s 1 i sa samim sobom, djeljiv još i s 641.

Prošlo je stotinjak godina od Fermatove hipoteze, kad je u XVIII. stoljeću švicarski matematičar Euler pronašao kontraprimjer za Fermatovu hipotezu. Neiskusan istraživač ili učenik mogao bi Fermatu prigovoriti da je hipoptezu donio na osnovi premalog broja slučajeva. No, pitamo se, postoji li uopće, i ako postoji, koji je to optimalan broj pojedinačnih slučajeva nakon kojeg možemo sa sigurnošću zaključivati nepotpunom indukcijom?[3]

Da bi dokazali da neki zaključak vrijedi za sve prirodne brojeve koristimo se metodom dokazivanja koju zovemo **matematička indukcija.** Princip matematičke indukcije zasniva se na 5. Peanovom aksiomu.

Kada želimo dokazati da neka formula ili svojstvo P(n) vrijedi za sve $n \in \mathrm{N}$, uzimamo da je skup M skup svih $n \in \mathrm{N}$ za koje vrijedi P(n), pa ako dokažemo da je

$$1 \in \mathrm{M} \quad \text{i}$$

$$n \in \mathrm{M} \Rightarrow n+1 \in \mathrm{M},$$

onda prema principu matematičke indukcije zaključujemo da je M = N, tj. da P(n) vrijedi za svako $n \in \mathrm{N}$.

Primjer 1. Dokažimo da za svaki $n \in \mathrm{N}$ vrijedi tvrdnja

$$\mathrm{P}(n): \quad 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dokaz ćemo provesti u dva dijela koje zovemo **baza indukcije** i **korak indukcije**.

1. Baza indukcije

P(1) je točno, jer je za $n = 1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

$$1 = 1.$$

Možemo dalje provjeriti vrijedi li navedeni izraz za $n = 2$ i $n = 3$. Vidimo da i za njih vrijedi. Ako ovako nastavimo, hoćemo li ikada doći do cilja? Ne, jer prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo. Zato ćemo prijeći na drugi dio dokaza.

---

[3]Pavleković, M., *Metodika nastave matematike s informatikom I*, Element, Zagreb, 2001.

2. Korak indukcije

Pretpostavimo da je P(n) točno pa pokušajmo dokazati P(n+1). U tu svrhu izmijenimo tvrdnju P(n) tako da dodamo još jedan član reda na lijevoj strani tvrdnje, a na desnoj umjesto n uvrstimo (n+1).

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}.$$

Na lijevoj strani 1+2+3+…+n možemo zamijeniti s $\frac{n(n+1)}{2}$, jer smo pretpostavili da je P(n) točno. Dobivamo da je

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2}.$$

Uredimo lijevu i desnu stranu jednadžbe.

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)[n+1+1]}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

One su jednake te smo dokazali da P(n) $\Rightarrow$ P(n+1). Možemo zaključiti da tvrdnja P(n) vrijedi za sve $n \in$ N.

Primjer 2. Dokažimo da je razlika $n^2 - n$ djeljiva s 2 za svaki n$\in$N.

P(n): $(n^2 - n) \vdots 2$

Dokaz:

1. Baza indukcije

P(1) je točno, jer je za n = 1

$$(1^2 - 1) \vdots 2$$

$$(1 - 1) \vdots 2$$

$$0 \vdots 2$$

2. Korak indukcije

Pretpostavimo da je P(n) točno pa pokušajmo dokazati P(n+1). U tu svrhu izmijenimo tvrdnju P(n) tako da umjesto n u izraz P(n) uvrstimo (n+1).

$$\left[(n+1)^2 - (n+1)\right] \vdots 2$$

$$\left[\left(n^2+2n+1\right)-\left(n+1\right)\right] \vdots 2$$
$$\left[n^2+2n+1-n-1\right] \vdots 2$$
$$\left[\left(n^2-n\right)+2n\right] \vdots 2$$

$\left(n^2-n\right)$ je djeljivo s 2 zbog pretpostavke da je za P(n) tvrdnja točna, a drugi pribrojnik $2n$ je također djeljiv s 2, pa je i njihov zbroj djeljiv s 2.

Vidimo da P(n) $\Rightarrow$ P(n+1). Zaključujemo da tvrdnja P(n) vrijedi za sve $n \in$ N.

4.3. Zbrajanje i množenje prirodnih brojeva

4.3.1. Zbrajanje prirodnih brojeva

Funkcija f: NxN $\rightarrow$ N definirana ovako:

$a+1 = a^+$, $a+b^+ = (a+b)^+$

zove se **zbrajanje u N.** Broj a+b je zbroj brojeva a i b.

Na primjer, $1+1 = 1^+ = 2$, $2+1 = 2^+ = 3$

$2+2 = 2+1^+ = (2+1)^+ = 3^+ = 4$

$2+3 = 2+2^+ = (2+2)^+ = 4^+ = 5$

Općenito vrijedi

$a+1 = a^+$, $a+b^+ = (a+b)^+$

$a+2 = (a+1)^+$

$a+3 = (a+2)^+$

…

Riječima: a+1 je sljedbenik od a, a+2 je sljedbenik od a+1, a+3 je sljedbenik od a+2,…, $a+b^+$ je sljedbenik od a+b. Ovdje je zbrajanje definirano induktivno (od posebnog ka općem).

Teorem 1. Za zbrajanje prirodnih brojeva vrijede zakoni:

1. Zakon zatvorenosti: Ako su a, b $\in$ N, tada je i a+b $\in$ N.
2. Zakon asocijacije: Ako su a, b, c elementi iz N, tada je (a+b)+c = a+(b+c).
3. Zakon komutacije: Ako su a, b elementi iz N, tada je a+b = b+a.
4. Zakon kancelacije (kraćenja): Ako je a+c = b+c, tada je a = b.

5. Zakon trihotomije: Za svaka dva elementa a, b iz N vrijedi jedna i samo jedna od ove tri izjave: $a = b$, $a < b$, $a > b$.

Dokaz.

1. Najprije pokažimo da taj zakon vrijedi za $b = 1$, tj. da je $(a+1) \in N$ za svaki $a \in N$.
   Možemo pisati:
   $a+1 = a^+$ (definicija zbrajanja)

   $a^+ \in N$ (2. Peanov aksiom)

   Sada ćemo pokazati da je $(a+b^+) \in N$ ako je $(a+b) \in N$.

   $a+b \in N$ (pretpostavka)

   $(a+b)^+ \in N$ (2. Peanov aksiom)

   $(a+b^+) \in N$ (definicija zbrajanja)

   Na temelju 5. Peanovog aksioma pokazali smo da je $a+b \in N$ za $b = 1$ i $a+b^+ \in N$ ako je $a+b \in N$ te zaključujemo da je $a+b \in N$ i za svaki $b \in N$.

2. Najprije ćemo pokazati da tvrdnja $a+(b+c) = (a+b)+c$ vrijedi za $c=1$ i za sve $a, b \in N$.
   Možemo pisati
   $a+(b+1) = a+ b^+$

   $= (a+ b)^+$ (definicija zbrajanja)

   $= (a+b)+1$ (definicija zbrajanja).

   Pokažimo sada da vrijedi $a+(b+ c^+)=(a+b)+ c^+$ uz pretpostavku $a+(b+c) = (a+b)+c$.

   $a+(b+ c^+) = a+(b+ c)^+$ (definicija zbrajanja)

   $= (a+(b+c))^+$ (definicija zbrajanja)

   $= ((a+b)+c)^+$ (po pretpostavci)

   $= (a+b)+c^+$ (definicija zbrajanja).

3. Najprije ćemo pokazati da tvrdnja $a+b = b+a$ vrijedi za $b = 1$ i za svako $a \in N$,
   $a+1 = 1+a$.

   Za $a = 1$, $1+1 = 1+1$, vrijedi.

   Dokažimo da vrijedi i za $a+1$ ako vrijedi za a. Time će biti dokazano da vrijedi za $a \in N$.

   $a+1 = 1+a$ (pretpostavka)

$a^+ + 1 = (a+1)+1$ (definicija zbrajanja)

$= (1+a)+1$ (pretpostavka)

$= 1+(a+1)$ (zakon asocijacije)

$= 1+ a^+$ (definicija zbrajanja)

Dokažimo da je tvrdnja valjana za sve a, $b \in N$. U tu svrhu dovoljno je pokazati da je ona valjana i za b+1 ako je valjana za b (jer smo pokazali da je ona valjana za svaki $a \in N$ i b=1).

$a+b = b+a$ (pretpostavka)

$a+b^+ = a+(b+1)$ (definicija zbrajanja)

$= (a+b)+1$ (zakon asocijacije)

$= (b+a)+1$ (pretpostavka)

$= b+(a+1)$ (zakon asocijacije)

$= b+(1+a)$ $(a+1=1+a)$

$= (b+1)+a$ (zakon asocijacije)

$= b^+ + a$ (definicija zbrajanja)

4. Treba dokazati da iz $a+c = b+c$ slijedi da je $a = b$.

Za c=1

$a+1 = b+1$ (pretpostavka)

$a^+ = b^+$ (definicija zbrajanja)

$a = b$ (4. Peanov aksiom)

Zaključujemo da iz $a+1 = b+1$ slijedi da je $a = b$.

Ostaje nam da pokažemo da iz $a+ c^+ = b+ c^+$ slijedi da je $a = b$, uz pretpostavku da iz $a+c = b+c$ slijedi da je $a = b$.

$a+ c^+ = b+ c^+$ (pretpostavka)

$(a+ c)^+ = (b+ c)^+$ (definicija zbrajanja)

$a+c = b+c$ (4. Peanov aksiom).

5. Ako je $a = b$, tada za $b = 1$ dobivamo da je $a = 1$, pa tvrdnja vrijedi ($1=1$).
   Uz pretpostavku da je $a = b$ vrijedi i tvrdnja $a +1 = b+1$ ili $a^+ = b^+$ u skladu s 4. Peanovim aksiomom.

   Ako je $a < b$, postoji c iz N tako da je $a+c = b$. (*)

   Najprije moramo dokazati da je $a+c \neq a$, za sve $a,c \in N$.
   Za $a = 1$ i bilo koji $c \in N$ to je točno, jer je $1+c = 1$ ili $c^+ = 1$ suprotno 3. Peanovom aksiomu.

   Za a^+
   $a^+ + c \neq a^+$, pod pretpostavkom da je $a+c \neq a$.
   Neka je
   $a^+ + c = a^+$
   $(a + c)^+ = a^+$ (definicija zbrajanja)
   $a + c = a$ (4. Peanov aksiom).
   Zadnja tvrdnja je suprotna pretpostavci da je $a+c \neq a$, pa je i $a^+ + c \neq a^+$.
   Time smo dokazali da je $a+c \neq a$ za sve a,c iz N.

   Sada možemo pristupiti dokazivanju početne tvrdnje (*).
   Za $c = 1$,
   $a + 1 = b$
   $a^+ = b$ (definicija zbrajanja)

   Potrebno je dokazati da ako je (i samo ako je) $b \neq 1$, tada postoji jedan i samo jedan a iz N tako da je $a^+ = b$.

   Kada bi b bio jednak 1, $a^+ = 1$, a to nije u skladu s 3. Peanovim aksiomom pa je $b \neq 1$.

   Iz 2. Peanovog aksioma slijedi da je svaki prirodni broj b sljedbenik jednog i samo jednog prirodnog broja a, tj. $b = a^+$.

   Vratimo se početnoj tvrdnji (*) i dokažimo da ona vrijedi za c^+.
   $a + c +1 = b + 1$
   $a + c^+ = b^+$ (definicija zbrajanja)
   $(a + c)^+ = b^+$ (definicija zbrajanja)
   $a + c = b.$ (4. Peanov aksiom)

   Time smo dokazali da postoji c iz N tako da je $a + c = b$.

   Dokaz za $a > b$ analogan je prethodnom dokazu pa ćemo ga izostaviti.

4.3.2. Množenje prirodnih brojeva

Funkcija $f : N x N \rightarrow N$ definirana ovako

$$a \cdot 1 = a, \qquad a \cdot b^{+} = a \cdot b + a$$

zove se **množenje u N.** Broj $a \cdot b$ zove se **produkt** ili **umnožak** brojeva a i b te piše ab.

Na primjer:

$3 \cdot 1 = 3$
$3 \cdot 2 = 3 \cdot 1^{+} = 3 \cdot 1 + 3 = 3 + 3 = 6$
$3 \cdot 3 = 3 \cdot 2^{+} = 3 \cdot 2 + 3 = 6 + 3 = 9$
$3 \cdot 4 = 3 \cdot 3^{+} = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$
…

Općenito vrijedi

$a \cdot 1 = a$
$a \cdot 2 = a \cdot 1 + a$
$a \cdot 3 = a \cdot 2 + a$
$a \cdot 4 = a \cdot 3 + a$
….
$a \cdot b^{+} = a \cdot b + a$

Ovdje je množenje definirano induktivno.

Teorem 2. Za množenje prirodnih brojeva vrijede zakoni:

1. Zakon zatvorenosti: Ako su a i b elementi iz N, tada je i ab element N.

2. Zakon distribucije: Množenje u N je distributivno prema zbrajanju u N, tj. za svaku trojku $a, b, c \in N$ vrijedi
$$a(b+c) = ab + ac$$

3. Zakon asocijacije: Ako su $a, b, c \in N$, tada je
$$(ab)c = a(bc)$$

4. Zakon komutacije: Za sve $a, b \in N$ vrijedi
$$ab = ba$$

5. Zakon kancelacije: Ako su $a, b, c \in N$ i vrijedi da je $ac = bc$, tada je $a = b$.

Dokaz.

1. Najprije pokažimo da je $ab \in N$ za svaki $a \in N$ i $b = 1$.

$a \cdot 1 = a$ (definicija množenja)

$a \cdot 1 \in N$ (jer je $a \cdot 1 = a \in N$).

Pokažimo da je sada i $ab^+ \in N$ ako je $ab \in N$.

$ab \in N$ (pretpostavka)

$ab + a \in N$ (zatvorenost zbrajanja)

$ab^+ \in N$ (definicija množenja)

Zaključujemo da je $ab \in N$ za svaki $a, b \in N$.

2. $a (b+c) = ab + ac$, za sve $a, b, c \in N$. (*)

Za $c = 1$ i $a,b \in N$ vrijedi

$a (b+1) = ab^+$ (definicija zbrajanja)

$= ab + a$ (definicija množenja)

$= ab + a \cdot 1$ (definicija množenja)

Pokažimo da vrijedi

$a (b + c^+) = ab + a c^+$ ako vrijedi (*).

$a (b + c^+) = a (b + c)^+$ (definicija zbrajanja)

$= a (b+c) + a$ (definicija množenja)

$= ab+ac+a$ (pretpostavka)

$= ab + (ac+a)$ (zakon asocijacije)

$= ab + ac^+$ (definicija množenja).

3. $(ab) c = a (bc)$, za sve $a, b, c \in N$. (*)
Za $c = 1$ i $a, b \in N$ vrijedi

$(ab) \cdot 1 = ab$ (definicija množenja)

$= a (b \cdot 1)$ (definicija množenja)

Pokažimo da vrijedi

$(a b) c^+ = a (b c^+)$ ako vrijedi (*) .

$(a b) c^+ = (a b) c + a b$ (definicija množenja)

$= a (b c) + a b$ (pretpostavka)

$= a\,(b\,c + b)$ (zakon distribucije)

$= a\,(b\,c^{+})$ (definicija množenja).

4. $a\,b = b\,a$, $a, b \in N$.

   Za $b = 1$ i $a \in N$ tvrdnja glasi $a \cdot 1 = 1 \cdot a$.

   Lijeva strana $a \cdot 1 = a$ po definiciji množenja. Treba dokazati da je $1 \cdot a = a$.

   Za $a = 1$, $1 \cdot 1 = 1$ i tvrdnja vrijedi.

   Pokažimo da vrijedi i za a^{+} uz pretpostavku da je $1 \cdot a = a$.

   $1 \cdot a^{+} = a^{+}$

   $1 \cdot a^{+} = 1\,(a + 1)$ (definicija zbrajanja)

   $= 1 \cdot a + 1 \cdot 1$ (zakon distribucije)

   $= a + 1$ (pretpostavka $1 \cdot a = a$)

   $= a^{+}$

   Treba još pokazati da tvrdnja vrijedi za b^{+} uz pretpostavku da je $ab = ba$.

   $a\,b^{+} = b^{+}\,a$

   $a\,b^{+} = a\,(b + 1)$ (definicija zbrajanja)

   $= ab + a$ (zakon distribucije)

   $= ba + a$ (pretpostavka $ab = ba$)

   $= b^{+}\,a$, (jer je $b^{+}\,a = (b + 1)\,a = ba + a$).

5. Iz $ac = bc$ slijedi da je $a = b$.

   Za $c = 1$ i $a, b \in N$.

   $a \cdot 1 = b \cdot 1$

   $a = b$ (definicija množenja)

   Dokažimo još da tvrdnja vrijedi za c^{+} uz pretpostavku da vrijedi za c.

   $ac^{+} = bc^{+}$

$a(c+1) = b(c+1)$ (definicija zbrajanja)

$ac + a = bc + b$ (zakon distribucije)

$a + ac = b + bc$ (zakon komutacije za zbrajanje)

$a + ac = b + ac$ (pretpostavka $ac = bc$)

$a = b$ (zakon kancelacije za zbrajanje).

4.4. Brojevni sustavi

4.4.1. Zapis prirodnog broja

Za nulu i prvih devet prirodnih brojeva uvedene su oznake 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Svaki prirodni broj zapisujemo u obliku

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0,$$

pri čemu su a_n, a_{n-1}, …, a_2, a_1, a_0 elementi skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Da bi se skratilo pisanje prirodnih brojeva dogovoreno je da se taj zbroj kraće piše

$$a_n\ a_{n-1} \ldots a_2\ a_1\ a_0\ .$$

Ovo je **pozicijski zapis** u dekadskom sustavu. Na primjer,

$$7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 6 = 736.$$

4.4.2. Brojevni sustavi

Zapis broja ne smijemo poistovjetiti sa samim brojem, jer se isti broj može zapisati na različite načine.

Rimljani su koristili slova I, V, X, L, C, D, M za 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

Primjer 1. 1996 ……MCMXCVI

Primjer 2. 1886…… MDCCCLXXXVI

Zadaci za vježbu:
a) Zapišite godinu vašeg rođenja rimskim brojem.
b) Zapišite 5 898 rimskim brojem.

Ovaj način je pogodan za zapis prirodnog broja, ali ne i za računanje. Slovima su se bilježili brojevi i u glagoljici.

4.4.2.1. Zapis broja u sustavu s bazom b

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji prirodni broj veći od 1.

Neka je $b > 1$ i $b \in N$. Prirodni broj x zapisan u pozicijskom sustavu s bazom b je

$$x = a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_{0\,(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \dots + a_2 \cdot b^2 + a_1 \cdot b + a_0 .$$

Znamenke a_n, a_{n-1}, …, a_2, a_1, a_0 su brojevi iz skupa {0, 1, 2, 3, …, b - 1}. Indeks (b) označava bazu u kojoj je zapisan broj.

Na primjer,

$$256_{(8)} = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6 = 128 + 40 + 6 = 174_{(10)}$$

Broj znamenaka, imena brojeva i postupak brojenja ovise o bazi brojevnog sustava. Tako za brojenje u sustavu s bazom 4 koristimo ove brojeve:

1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, …

Kako se čitaju ti brojevi? Npr. 100 se čita 1-0-0 ali i sto.

U oktalnom sustavu, b = 8, znamenke su {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. Brojeve čitamo kao u dekadskom.

U binarnom sustavu, b = 2, znamenke su {0, 1}. Čitamo znamenku po znamenku. $19 = 10011_{(2)}$.

U heksadekadskom, b = 16, znamenke su {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F}. Čitamo znamenku po znamenku.

$A_{(16)} = 10$, $B_{(16)} = 11$, $C_{(16)} = 12$, $D_{(16)} = 13$, $E_{(16)} = 14$, $F_{(16)} = 15$

$2D_{(16)} = 2 \cdot 16 + 13 = 32 + 13 = 45$

$E3\,8_{(16)} = 14 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 8 = 3\,640$

Najvažnije su binomna i heksadekadska baza jer se one koriste u računalima. Jedna znamenka heksadekadskog sustava odgovara točno četirima znamenkama binarnog sustava. To je zato jer je $16 = 2^4$.

Odnos brojeva u ova dva sustava je

(16)		(2)	(16)		(2)	(16)		(2)	(16)		(2)
0	=	0	4	=	100	8	=	1000	C	=	1100
1	=	1	5	=	101	9	=	1001	D	=	1101
2	=	10	6	=	110	A	=	1010	E	=	1110
3	=	11	7	=	111	B	=	1011	F	=	1111

Primjer 1. $4E9_{(16)} = 100\ 1110\ 1001_{(2)}$

Primjer 2. $110\ 1010\ 1110\ 1011_{(2)} = 6BEB_{(16)}$

Slična veza postoji i između binarnog i oktalnog zapisa brojeva

(8)		(2)	(8)		(2)
0	=	0	4	=	100
1	=	1	5	=	101
2	=	10	6	=	110
3	=	11	7	=	111

Primjer 1. $27_{(8)} = 10\ 111_{(2)}$

Primjer 2. $10\ 110\ 111\ 001_{(2)} = 2671_{(8)}$

Primjer 3. $3BD8_{(16)} = 11\ 1011\ 1101\ 1000_{(2)} = 11\ 101\ 111\ 011\ 000_{(2)} = 35730_{(8)}$

Zadaci za vježbu

1. $34_{(8)}$ = ……………$_{(2)}$

2. $10110011100101_{(2)}$ = …………………$_{(8)}$

3. $28EC_{(16)}$ = …………………………$_{(2)}$ = …………………………$_{(2)}$ =………………$_{(8)}$

4.4.2.2. Prijelaz iz dekadskog sustava u sustav neke druge baze

Primjer. 238 pretvoriti u zapis po bazi 8.

$8^1 = 8, \quad 8^2 = 64, \quad 8^3 = 512, \quad \ldots$

$238 = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 6 = 356_{(8)}$

Uočimo da je

238 : 64 = 3 i ostatak 46,

46 : 8 = 5 i ostatak je 6,

ili

238 : 8 = 29 i ostatak je 6,

29 : 8 = 3 i ostatak je 5.

To možemo izraziti :

$238 = 29 \cdot 8 + 6,$

$29 = 3 \cdot 8 + 5,$

pa je $238 = (3 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 6 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6.$

Na navedenom postupku se temelji algoritam pomoću kojeg lako prevedemo broj iz baze 10 u neku drugu bazu. Napomenimo da je algoritam svaki matematički postupak koji se izvodi po strogo određenim pravilima.

ALGORITAM

Zadani broj x iz dekadske baze treba prevesti u bazu b. U tu svrhu dijelimo x s b, a zatim nastavljamo s dijeljenjem redom svih dobivenih kvocijenta brojem b, sve dok kvocijent ne bude manji od b.

$x = q_1 b + a_0 \qquad 0 \leq a_0 < b$

$q_1 = q_2 b + a_1 \qquad 0 \leq a_1 < b$

$q_2 = q_3 b + a_2 \qquad 0 \leq a_2 < b$

$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$

$q_{n-1} = q_n b + a_{n-1} \qquad 0 \leq a_{n-1} < b$

$q_n = 0 \cdot b + a_n \qquad 0 \leq a_n < b$

x možemo prikazati pomoću dobivenih kvocijenata i ostataka ovako:

$$x = q_1 b + a_0$$

$$= (q_2 b + a_1)b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

$$= (q_3 b + a_2)\, b^2 + a_1 b + a_0 = q_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$$

$$\dots$$

$$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0$$

$$= a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_{0\,(b)}$$

Postupak zapisujemo u obliku tablice.

x	q_1	q_2	$\cdots$	q_{n-1}	q_n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n

Primjer. Prevesti broj 243 681 iz dekadskog u oktalni sustav.

Poslužimo se algoritmom. U prvi redak prvog stupca upisujemo bazu 8. U prvi redak drugog stupca upisujemo broj 243681, tj. broj koji treba prevesti u novu bazu. Podijelimo 243681 s 8. Rezultat je 30460 i ostatak 1. Rezultat zapisujemo na vrh slijedećeg stupca, a u zadnji redak drugog stupca ispod broja 243 681, upisujemo dobiveni ostatak 1. U srednjem retku su ostaci i spuštene znamenke za provedeno dijeljenje. Postupak nastavljamo dijeljenjem broja 30460 s 8. Rezultat 3807 zapisujemo u prvi redak slijedećeg stupca, a ostatak 4 u treći redak trećeg stupca ispod broja 30460. Dijeljenjem broja 3807 s 8 dobivamo broj 475 i ostatak 7 te ih zapisujemo na isti način. Postupak nastavljamo dok ne dođemo do zadnjeg ostatka, a to je 7.

8	243681	30460	3807	475	59	**7**
	36 48 **1**	64 60 **4**	60 47 **7**	75 **3**	**3**	
	1	4	7	3	3	7

Da bi došli do zadnjeg ostatka morali smo zadani broj dijeliti pet puta s 8. Zato je taj broj u novom zapisu na prvom mjestu. Iza njega je ostatak 3 kojeg smo dobili u četvrtom dijeljenju. Slijedi ostatak koji smo dobili u trećem dijeljenju, a to je opet 3, itd.

$$7 \cdot 8^5 + 3 \cdot 8^4 + 3 \cdot 8^3 + 7 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8 + 1 = 733741_{(8)}$$

$243\,681 = 733741_{(8)}$

Zadatak za vježbu

Prevedite broj 51 327 iz dekadskog u heksadekadski sustav.

4.4.2.3. Prijelaz u dekadski sustav

$4157_{(8)} = 4 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 7 =$

$= 7 + 8 (5 + 1 \cdot 8 + 4 \cdot 8^2) =$

$= 7 + 8 (5 + 8 (1 + 4 \cdot 8)) =$

$= 7 + 8 (5 + 8 \cdot 33) =$

$= 7 + 8 \cdot 269 =$

$= 2\,159$

Gornji postupak možemo zapisati u tablicu pri čemu su u prvom redu znamenke zadanog broja, a u drugom redu baza, zatim prva znamenka broja iza čega slijede izrazi izraženi u zagradama u prije provedenom izračunu.

	4	1	5	7
8	4	33	269	2 159
		$8 \cdot 4+1$	$8 \cdot 33+5$	$8 \cdot 269+7$

Ovaj se postupak naziva HORNEROV ALGORITAM. Njegova je karakteristika da se do rezultata može doći samo pomoću zbrajanja i množenja, a ne i potenciranja. Opišimo taj postupak općenito:

	a_n	a_{n-1}	…	a_1	a_0
b	$c_n = a_n$	$c_{n-1} = c_n b + a_{n-1}$	…	$c_1 = c_2 b + a_1$	$c_0 = c_1 b + a_0$

Broj c_0 predstavlja traženi rezultat, jer je

$c_0 = c_1 b + a_0$

$= (c_2 b + a_1) b + a_0 = c_2 b^2 + a_1 b + a_0$

$= (c_3 b + a_2) b^2 + a_1 b + a_0 = c_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$

$\ldots$

$= c_{n-1} b^{n-1} + c_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_1 b + a_0$

$= (c_n b + a_{n-1}) b^{n-1} + c_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_1 b + a_0$

$= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + c_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_1 b + a_0 .$

Zadatak za vježbu

Prevedite u dekadski sustav broj $A209E_{(16)}$ koristeći Hornerov algoritam.

4.5. Djeljivost brojeva

4.5.1. Definicija djeljivosti

Za broj $a \in N$ kažemo da je djeljiv brojem $b \in N$ i pišemo $a \vdots b$ onda i samo onda ako postoji prirodni broj c tako da bude a = bc. Za broj b kažemo u tom slučaju da je **mjera** ili **divizor** ili **djelitelj** broja a, a za broj a da je **višekratnik** ili **multiplum** broja b.

Na primjer, $15 \vdots 3$ jer postoji broj $5 \in N$, tako da je 15 = 3 · 5.

Po ovoj definiciji svaki je prirodan broj djeljiv s 1 i sa samim sobom.
Ako je a djeljivo s b ($a \vdots b$), onda je b divizor od a (b | a).

Primjer. Odredite sve mjere broja 45.

Rješenje: 45 = 45 · 1, 45 = 15 · 3, 45 = 9 · 5.
Mjere broja 45 su: 45, 15, 9, 5, 3 i 1.

Zadaci za vježbu:

1. Odredite sve mjere broja 75.
2. Odredite sve mjere broja 120.

4.5.2. Prosti i složeni brojevi

Prirodni broj veći od 1 koji je djeljiv samo s 1 i samim sobom zove se prost ili prim broj.
Prirodni brojevi veći od 1, koji nisu prosti, zovu se složeni brojevi.

Prema tome prirodni brojevi dijele se u tri klase: broj 1, prosti brojevi i složeni brojevi. 1 nije ni prost ni složen broj.

Definiciju djeljivosti možemo proširiti i na brojeve skupa N_0 i reći da je 0 djeljiva svakim prirodnim brojem, jer je $0 = a \cdot 0$. Ipak, nula nije ni prost ni složen broj.

Koliko ima prostih brojeva?

Teorem. Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Dokaz. Koristit ćemo indirektan put dokazivanja.
Pretpostavimo da prostih brojeva ima konačno mnogo i pokažimo da ta pretpostavka nije održiva. Zaključujemo ovako:
Ako prostih brojeva ima konačno mnogo, među njima postoji jedan koji je najveći. Označimo ga s p.

Promotrimo broj $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p) + 1$,

gdje je broj u zagradi jednak produktu svih prostih brojeva.

Broj $(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p) + 1$ veći je (po pretpostavci) od svakog prostog broja i po pretpostavci nije prost. Onda je složen (po definiciji složenih brojeva). Ali nije ni složen, jer nije djeljiv ni jednim prostim brojem od navedenih koji su po pretpostavci jedini prosti brojevi. Naime, ako ga podijelimo bilo kojim od brojeva 2, 3, 5, …, p ostatak će biti 1.

Zaključak je jasan: takav broj p (najveći prost broj) ne postoji, tj. skup prostih brojeva je beskonačan.

4.5.3. Eratostenovo sito

Eratostenovo sito je postupak pomoću kojeg se mogu naći svi prosti brojevi koji nisu veći od danog broja n.

Ispišimo sve prirodne brojeve od 2 do n.
Pođemo od broja 2 i precrtamo svaki drugi broj iza njega. Onda pođemo od broja 3 i precrtamo svaki treći broj iza njega, pri čemu se broje i već precrtani brojevi. Zatim od broja 5 precrtamo svaki peti broj koji dolazi iza njega, itd. Kad dođemo do prostog broja p čiji je kvadrat veći od n, zadatak je riješen. Neprecrtani brojevi su svi prosti brojevi koji nisu veći od n.

Zadatak za vježbu

Nađite sve proste brojeve do 100.

4.5.4. Zajedničke mjere brojeva

Zajedničkom mjerom brojeva a, b, c, … $\in N_0$, među kojima je bar jedan različit od nule, nazivamo svaki prirodni broj kojim je djeljiv svaki od brojeva a, b, c, … .

Na primjer, zajedničke mjere brojeva 8 i 40 su {1,2,4,8}.

Među zajedničkim mjerama brojeva a, b, c, … postoji jedna koja je najveća. Nju označavamo

M (a, b, c, …).

Primjer. M (8, 40) = 8, jer je 8 = 2 · 2 · 2 i 40 = 2 · 2 · 2 · 5.

Zadaci za vježbu

1. Nađite zajedničke mjere brojeva: a) 25, 45; b) 8, 20, 32 .
2. Koliko zajedničkih mjera imaju brojevi: a) 5^3 i 5^7 ; b) 5^3 i 7^4 ;c) 5^2 i 7^3.
3. Ako je a+b =c, tada je M(a,b) = M (b,c). Primijenite ovu tvrdnju na brojeve a = 8, b = 12 i c = 20.

4.5.5. Euklidov algoritam

Pomoću EUKLIDOVOG ALGORITMA izračunavamo najveću zajedničku mjeru dvaju brojeva. Algoritam se zasniva na dijeljenju brojeva.

$M(a,b) = M(b,r_1) = M(r_1,r_2) = \ldots = M(r_{n-1},r_n) = r_n$, pri čemu su $r_1, r_2, \ldots r_n$ ostaci koji se dobiju dijeljenjem, najprije a i b, a zatim b i r_1, zatim r_1 i r_2, itd. Postupak je gotov kada dođemo do ostatka 0. Najmanja zajednička mjera je predzadnji ostatak ili zadnji divizor r_n .

Primjer. Odredite najveću zajedničku mjeru brojeva 325 i 234.

M (325,234) = M (234, 91) = M (91, 52) = M (52, 39) = M (39,13) = 13

325 : 234 = 1	234:91=2	91:52=1	52:39 =1	39:13=3
91	52	39	13	0

Zadaci za vježbu

1. Izračunajte a) M (360, 81), b) M (1 521, 240), c) M (7·1 521, 7· 240).
   Koristite činjenicu da je M (ka,kb) = k M(a,b).

2. Od 280 jabuka, 140 naranača i 70 čokolada treba sastaviti darove za djecu tako da svaki dar ima jednak broj jabuka, naranača i čokolada. Koji je najveći mogući broj darova?

Navedimo još nekoliko definicija koje govore o prirodnim brojevima.

Definicija 1. Za brojeve a,b $\in$ N kažemo da su **relativno prosti** ako i samo ako je M (a,b) = 1.

Definicija 2. Za prirodne brojeve a i b kažemo da su **prijateljsk**i ako je suma svih mjera broja a jednaka sumi svih mjera broja b i ta je jednaka a + b.

Primjer. Ispitati jesu li 220 i 284 prijateljski brojevi?

Sve mjere broja 220 su: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 i 220.
Sve mjere broja 284 su: 1, 2, 4, 71, 142 i 284.

1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22+ 44 + 55 + 110 + 220 = 504
1 + 2 + 4 + 71 + 142 + 284 = 504
220 + 284 = 504

Rješenje: 220 i 284 su prijateljski brojevi.

Definicija 3. Za broj a $\in$ N kažemo da je **savršen** ili **perfektan** ako je zbroj svih njegovih mjera jednak 2a.

Primjer. Uvjerite se da su brojevi 6 i 496 savršeni brojevi.

Sve mjere broja 6 su: 1, 2, 3 i 6. Njihov je zbroj 1 + 2 + 3 + 6 =12 i 2· 6 = 12. 6 je savršen broj.

Sve mjere broja 496 su: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248 i 496.

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 + 496 = 992

2· 496 = 992

Možemo zaključiti da je 496 savršen broj.

Zadaci za vježbu

1. Brojeve 256, 10 458, 11 327 prikažite u obliku produkta!
2. Ispitajte da li su 28 i 8 128 savršeni brojevi.

4.5.6. Zajednički višekratnici brojeva

Zajedničkim višekratnikom brojeva a, b, c, … $\in$ N nazivamo svaki prirodni broj koji je djeljiv svakim od brojeva a, b. c,… . Tako su zajednički višekratnici brojeva 4 i 6 elementi skupa {12, 24, 36, …}.

Među zajedničkim višekratnicima brojeva a, b, c, … postoji jedan koji je najmanji i označavamo ga s V(a, b, c, …). Npr. V(4,6) = 12.

Lako se uviđa da vrijedi

$$V(a,b) = \frac{ab}{M(a,b)} \qquad \text{i} \qquad V(ka,kb) = kV(a,b)$$

Primjer 1. Izračunajte a) V(8,15) i b) V(32,80,120).

a) $M(15,8) = M(8,7) = M(7,1) = M(1,1) = 1$,

$$V(15,8) = \frac{15 \cdot 8}{1} = 120$$

b) Najmanji zajednički višekratnik triju brojeva dobit ćemo tako da najprije odredimo najmanji zajednički višekratnik dva broja, a zatim najmanji zajednički višekratnik dobivenog višekratnika i preostalog broja.

$$M(120,80) = M(80,40) = 40 \,, \quad V(120,40) = \frac{120 \cdot 40}{40} = 120$$

$$M(120,32) = M(32,24) = M(24,8) = 8 \,, \quad V(120,32) = \frac{120 \cdot 32}{8} = 480 \,.$$

Mogli smo također rastaviti na faktore sva tri broja i formirati njihov najmanji zajednički višekratnik ovako:

$32 = 2^5 \qquad 80 = 2^4 \cdot 5 \qquad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$V(32,80,120) = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$.

Primjer 2. U nekom trenutku tri Zemljina satelita nalaze se iznad sjevernog pola. Jedan ima vrijeme ophodnje 90, drugi 95, a treći 100 minuta. Nakon koliko bi se minuta ti sateliti ponovno našli iznad sjevernog pola?

Rješenje: Treba naći najmanji zajednički višekratnik vremena ophodnje tri satelita.

$90 = 2 \cdot 5 \cdot 9 \qquad 95 = 5 \cdot 19 \qquad 100 = 2^2 \cdot 5^2$

$V(90,95,100) = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 9 \cdot 19 = 17\,100$ minuta.

Zadaci za vježbu

1. Izračunajte V (32,80) i V(8,168,28).

2. Neka je $P \subset N$ skup koji se sastoji od višekratnika brojeva a, b, c, … . Ima li P minimalan element u odnosu na relaciju „biti divizor“? Ima li maksimalan element? Da li je P potpuno ili parcijalno uređen s obzirom na relaciju „biti divizor“?

5. CIJELI BROJEVI

5.1. Skup cijelih brojeva kao proširenje skupa prirodnih brojeva

U skupu prirodnih brojeva definirane su dvije operacije, zbrajanje i množenje. Za njih vrijede svojstva:

1. $x + y = y + x$ komutativnost zbrajanja
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ asocijativnost zbrajanja
3. $x \cdot y = y \cdot x$ komutativnost množenja
4. $x (y \cdot z) = (x \cdot y) z$ asocijativnost množenja
5. $1 \cdot x = x$ postojanje neutralnog elementa za množenje
6. $x (y + z) = x y + x z$ distribucija množenja prema zbrajanju.

Skup prirodnih brojeva je zatvoren s obzirom na operaciju zbrajanja. On je zatvoren i s obzirom na operaciju množenja. To znači da vršeći ove operacije u skupu N rezultat je ponovno neki element iz skupa N. Zato kažemo da su u skupu N definirane operacije zbrajanja i množenja.

Za operacije oduzimanja i dijeljenja kažemo da nisu definirane u skupu N. To znači da ovim operacijama ne dobivamo uvijek za rezultat element iz N.

Promotrimo jednadžbu

$x + n = m$, pri čemu su n i m iz N.

Ova jednadžba nema rješenje u skupu N ako je $n \geq m$.

Da bismo mogli riješiti tu jednadžbu (oduzeti bilo koja dva prirodna broja) moramo skup N proširiti nulom i negativnim cijelim brojevima. Na taj način dobivamo **skup cijelih brojeva Z**.

Z = {…,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …}

Za ovako proširen skup brojeva i operacije zbrajanja i množenja vrijede ista svojstva kao i u skupu N. Tim svojstvima dodajemo dva nova svojstva:

1. $x + 0 = x$, 0 je neutralni element za zbrajanje.

2. Za svaki x iz Z, postoji (–x) iz Z, takav da je $x + (-x) = 0$.

Ovo svojstvo nazivamo postojanje suprotnog broja. Primijetimo da je $-(-x) = x$.

Definiranjem suprotnog elementa u skupu cijelih brojeva uvodimo operaciju oduzimanja kao operaciju zbrajanja suprotnog elementa.

$$y - x = y + (-x)$$

To znači da je $y - x$ samo kraći (jednostavniji) zapis izraza $y + (-x)$.

5.2. Definicija operacije oduzimanja

Definicija. Oduzimanje dvaju brojeva je zbrajanje prvog broja sa suprotnim brojem drugog broja.

Sada je jednadžba $x + n = m$ rješiva u skupu Z za sve n, m iz N.

$$x + n + (-n) = m + (-n)$$

$$x + 0 = m + (-n)$$

$$x = m + (-n).$$

6. RACIONALNI BROJEVI

6.1. Polje racionalnih brojeva

Racionalan broj je broj oblika $\frac{m}{n}$, pri čemu je *m* cijeli broj, a *n* prirodni broj. Skup svih racionalnih brojeva označavamo s Q.

Primijetimo da je $N \subset Z \subset Q$.

Računske operacije iz skupa cijelih brojeva proširuju se na skup racionalnih brojeva ovako:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + pn}{nq}$$

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{nq}$$

Za ove operacije vrijede sva svojstva u Q kao i u Z. Ali ima novih svojstava koja su karakteristična za skup Q. Navedimo ih:

R1: $x+y = y+x$, za sve $x,y \in Q$

R2: $x+(y+z) = (x+y)+z$, za sve $x,y,z \in Q$

R3: $x+0 = x$, za svaki $x \in Q$

R4: Za svako $x \in Q$, postoji $(-x) \in Q$, tako da je $x+(-x) = 0$

R5: $x \cdot y = y \cdot x$, za sve $x,y \in Q$

R6: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, za sve $x,y,z \in Q$

R7: $1 \cdot x = x$, za svaki $x \in Q$

R8: Za svako $x \in Q$, $x \neq 0$, postoji $x' \in Q$, tako da je $x' \cdot x = 1$

R9: $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$, za sve $x,y,z \in Q$

Kažemo da skup Q čini polje. **Aksiomi R1 do R9 su aksiomi polja**.

Napomena uz R8.

x' od x je $\frac{1}{x}$ ili x^{-1}, x' je recipročan broj.

6.2. Definicija operacije dijeljenja

Promotrimo jednadžbu **$a \cdot x = b$, za sve $a, b \in$ Q i $a \neq 0$.**

Nju možemo riješiti ovako $a' \cdot (a \cdot x) = a' \cdot b$

$$(a' \cdot a) \cdot x = a' \cdot b$$

$$1 \cdot x = a' \cdot b$$

$$x = a^{-1} \cdot b$$

$$x = \frac{1}{a} \cdot b = \frac{a}{b}$$

Time smo definirali novu operaciju, dijeljenje $a : b$ ili $\frac{a}{b}$. Količnik dva racionalna broja pri čemu je djelitelj $\neq 0$, ponovno je racionalan broj. Dijeljenje broja a racionalnim brojem b svodi se na množenje broja a s recipročnim brojem broja b.

Dijeljenje je množenje s recipročnim brojem.

Oduzimanje i dijeljenje u Q su izvedene operacije iz zbrajanja i množenja i predstavljaju samo jednostavniji zapis za zbrajanje sa suprotnim elementom i množenje s recipročnim brojem.

6.3. Q je uređeno polje

U skupu Q možemo definirati relaciju uređenja < ovako:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow 0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

Pogledajmo $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ / bd , $b,d \in \mathrm{N}$ po definiciji racionalnih brojeva.

$$ad < \mathrm{bc}$$

Prema tome,

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow 0 < \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \Leftrightarrow ad < \mathrm{bc} .$$

Definirajmo relaciju uređenja ≤.

$$\mathrm{x} \leq \mathrm{y} \Leftrightarrow (\mathrm{x} = \mathrm{y} \text{ ili } \mathrm{x} < \mathrm{y})$$

Svojstva ove relacije su:

R 10: $x \leq y$ ili $y \leq x$ (zakon dihotomije)

R 11: ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $x = y$ (antisimetričnost)

R 12: ako je $x \leq y$ i $y \leq z$, onda je $x \leq z$ (tranzitivnost)

R 13: ako je $x \leq y$, onda za svaki z iz Q vrijedi $x+z \leq y+z$ (nepromjenjivost)

R 14: ako je $0 \leq x$ i $0 \leq y$, onda je $0 \leq xy$.

Polje racionalnih brojeva je uređeno polje, jer vrijede aksiomi R1 do R14.

6.4. Decimalni prikaz racionalnog broja

$$\frac{1}{2} = 0{,}5$$
$$\frac{11}{8} = 1{,}375$$
$$\frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\dot{3}$$
$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857... = 0{,}\dot{1}4285\dot{7}$$

$$\frac{37}{14} = 2{,}6428571428571... = 2{,}6\dot{4}2857\dot{1}$$

Opći oblik mješovito periodičnog decimalnog broja

$$x = a_k \ldots a_0{,}b_1 \ldots b_r\, \dot{c}_1 \ldots \dot{c}_p$$

sastoji se od cjelobrojnog dijela, predperioda i perioda.

Kada će prikaz racionalnog broja biti konačan?

Neka su m i n relativno prosti brojevi. Ako $\frac{m}{n}$ ima konačan decimalni prikaz

$$\frac{m}{n} = a_k \ldots a_0{,}b_1 \ldots b_r \quad / \cdot 10^r$$

$$\frac{m \cdot 10^r}{n} = a_k \ldots a_0 b_1 \ldots b_r$$

To znači da je broj 10^r djeljiv s n (jer su m i n relativno prosti). To je moguće samo ako su 2 i 5 jedini mogući prosti djelitelji broja n. Nazivnik mora biti

$$n = 2^k \cdot 5^l,$$

pri čemu su k i l prirodni brojevi ili je neki od njih jednak nuli.

Primjer.

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5^n}, \frac{1}{80},$ i sl. imaju konačni decimalni prikaz. Brojnik može biti bilo koji cijeli broj.

Decimalni prikaz racionalnog broja je konačan onda i samo onda ako su 2 ili 5 (ili oboje) jedini prosti faktori nazivnika. Decimalni prikaz svih ostalih racionalnih brojeva s nazivnikom većim od 1 je periodičan.

Dokaz za ovu tvrdnju. Ako pri dijeljenju broja m brojem n dobijemo neki ostatak jednak nuli, dijeljenje se prekida i decimalni prikaz je konačan. Ako su svi ostaci različiti od nule, onda su to brojevi manji od n. Zato ćemo najkasnije u n-tom koraku dijeljenja dobiti isti ostatak kao u nekom od prijašnjih koraka. Nakon toga se brojevi u kvocijentu ponavljaju. Zato je decimalni prikaz periodičan.

Primjer 1. Pokazati da racionalni brojevi $\frac{9}{4}$ i $\frac{1}{80}$ imaju konačan decimalni zapis**.**

To ćemo pokazati dijeljenjem brojnika s nazivnikom.

9 : 4 = 2,25	1 : 80 = 0,0125
10	100
20	200
0	400
	0

Rješenje. $\frac{9}{4} = 2,25;\ \frac{1}{80} = 0,0125.$

Svaki racionalan broj ima konačan ili beskonačan periodičan decimalni prikaz.

Vrijedi li obrat?(Svakom periodičnom decimalnom broju odgovara jedan racionalan broj). Da.

Čisto periodičan decimalan broj treba napisati u obliku razlomka.

$x = 0,\dot{c}_1...\dot{c}_p \quad / \cdot 10^p$

$10^p x = c_1 \ldots c_p, \dot{c}_1...\dot{c}_p$

$10^p x = c_1...c_p + 0,\dot{c}_1...\dot{c}_p$

$10^p x - x = c_1 \ldots c_p$

$x\,(10^p - 1) = c_1 \ldots c_p \quad / : (10^p - 1)$

$$x = \frac{c_1...c_p}{10^p - 1} = \frac{c_1...c_p}{99...9}$$

Primjer 2. Napišite decimalne brojeve $0,\dot{1}\dot{2}$ i $0,\dot{2}3809\dot{5}$ u obliku razlomka.

Rješenje: Broj $0,\dot{1}\dot{2}$ ima dvije decimale koje se ponavljaju pa se period sastoji od dva broja, tj. p = 2. Brojnik razlomka će biti 12, a nazivnik $10^2 - 1 = 100 - 1 = 99$. Primijetimo da će broj devetki u nazivniku biti jednak broju decimala u periodu.

$$0,\dot{1}\dot{2} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

Broj $0,\dot{2}3809\dot{5}$ ima period od 6 decimala te ga možemo napisati:

$$0,\dot{2}3809\dot{5} = \frac{238095}{999999} = \frac{26455}{111111} = \frac{2405}{10101} = \frac{5 \cdot 13 \cdot 37}{3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37} = \frac{5}{21}.$$

Poželjno je dobivene razlomke skratiti ako je to moguće.

Promotrimo sada opći slučaj

$x = a_k \ldots a_0, b_1 \ldots b_r\, \dot{c}_1...\dot{c}_p$

$$x = a_k \ldots a_0, b_1 \ldots b_r\, \dot{c}_1...\dot{c}_p \cdot \frac{10^r}{10^r}$$

$$x = \frac{a_k...a_0 b_1...b_r, \dot{c}_1...\dot{c}_p}{10^r}$$

$$x = \frac{a_k...a_0 b_1...b_r}{10^r} + \frac{0,\dot{c}_1...\dot{c}_p}{10^r}$$

$$x = \frac{a_k...a_0b_1...b_r}{10^r} + \frac{c_1...c_p}{10^r(10^p - 1)}$$

$$x = \frac{a_k...a_0b_1...b_r \cdot 99...9 + c_1...c_p}{99...900...0}$$

Svaki periodičan decimalni zapis odgovara racionalnom broju.

Primjer 3. Napišite decimalne brojeve $25{,}384\dot{7}\dot{2}$ i $1{,}8\dot{3}1\dot{4}$ u obliku razlomka.

Rješenje. Primijenimo prethodno dobivenu formulu. Broj $25{,}384\dot{7}\dot{2}$ ima cjelobrojni dio 25 (k = 2), zatim predperiod koji se sastoji od tri znamenke 384 (r = 3) i period koji se sastoji od dvije znamenke 72 (p = 2). U skladu s izrazom za opći slučaj, u brojniku množimo broj 25384 s 99 jer se period sastoji od dva broja (p = 2) te mu dodamo broj 72 koji se sastoji od znamenki perioda. Nazivnik je broj koji u zapisu ima dvije devetke (p = 2) i tri nule (r = 3).

$$25{,}384\dot{7}\dot{2} = \frac{25384 \cdot 99 + 72}{99000} = \frac{2513088}{99000} = \frac{314136}{12375} = \frac{104712}{4125} = \frac{34904}{1375}$$

Analogno postupamo za broj $1{,}8\dot{3}1\dot{4}$. Primijetimo da je k = 1, r = 1 i p = 3.

$$1{,}8\dot{3}1\dot{4} = \frac{18 \cdot 999 + 314}{9990} = \frac{18296}{9990} = \frac{9148}{4995}.$$

7. REALNI BROJEVI

7.1. Realni brojevi - strogi opis

Svojstva za skup racionalnih brojeva Q od R1 do R14 treba nadopuniti aksiomom R15 **o potpunosti** skupa realnih brojeva, po kojem se realni brojevi razlikuju od racionalnih brojeva.

Realne brojeve dobivamo iz racionalnih upotpunjujući ih iracionalnim brojevima, ali tako da na novom skupu vrijede sva svojstva algebarskih operacija za Q. **Skup realnih brojeva** označavamo s **R**, dok **skup iracionalnih brojeva** označavamo s I.

$$\mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$$

$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$$

Intuitivno:

- geometrijski pristup
  Skup realnih brojeva možemo poistovjetiti s brojevnim pravcem: svakom realnom broju odgovara jedna točka brojevnog pravca i obratno: svakoj točki brojevnog pravca odgovara jedan realan broj.

- algebarski pristup
  Skup realnih brojeva sadrži sve decimalne brojeve oblika

$$\pm a_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

pri čemu je a_0 neki prirodni broj ili 0, a $b_1, b_2, \ldots$ znamenke decimalnog prikaza.

Zadatak. Pomoću kalkulatora odredite decimalni zapis $\sqrt{2}$, tako da 3 decimale budu točno određene. Znamo da je $\sqrt{1} = 1$ i $\sqrt{4} = 2$, pa će $\sqrt{2}$ biti veće od 1 a manje od 2.

$$1 < \sqrt{2} < 2 \quad /^2$$

$$1^2 < 2 < 2^2 \qquad\qquad x_1 = 1;\ \sqrt{2} = 1,\ldots$$

Prvu decimalu naći ćemo tako da izračunamo kvadrate brojeva 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9. Kako je kvadrat broja 1,4 manji od 2, a kvadrat broja 1,5 veći od 2, prva decimala će biti 4.

$$1{,}96 < 2 < 2{,}0164$$

$$1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 \qquad x_2 = 1{,}4;\ \sqrt{2} = 1{,}4\ldots$$

Za drugu decimalu treba izračunati kvadrate brojeva 1,41; 1,42; 1,43; …; 1,49. Kvadrat broja 1,41 manji je od 2, a kvadrat broja 1,42 je veći od 2, pa je druga decimala 1.

$$1{,}9881 < 2 < 2{,}0164$$

$$1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2 \qquad x_3 = 1{,}41;\ \sqrt{2} = 1{,}41...$$

Za treću decimalu izračunat ćemo kvadrate brojeva 1,411; 1,412; 1,413; … ; 1,1419 te utvrditi koja dva susjedna broja imaju kvadrate za koje vrijedi da je prvi manji od 2, a drugi veći od 2. To su brojevi 1,414 i 1,415 pa je treća decimala 4.

$$1{,}9993 < 2 < 2{,}0022$$

$$1{,}414^2 < 2 < 1.415^2 \qquad x_4 = 1{,}414;\ \sqrt{2} = 1{,}414...$$

Na ovaj način iracionalan broj $\sqrt{2} = 1{,}414...$ možemo izraziti, nastavljajući gornji postupak, po volji točno.

$\sqrt{2}$ i π su iracionalni brojevi. Ali to su i svi korijeni iz prostih brojeva. Oni imaju beskonačan neperiodski decimalni prikaz, za razliku od racionalnih brojeva, koji imaju beskonačan periodski prikaz.

7.2. Intervali

Podskupovi brojevnog pravca su intervali.

Zatvoreni interval: $[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$

Poluotvoreni intervali: $\langle a,b] = \{x \in R : a < x \le b\}$ i $[a,b\rangle = \{x \in R : a \le x < b\}$

Otvoreni interval: $\langle a,b\rangle = \{x \in R : a < x < b\}$

$[a,a] = \{a\}$

$[a,\infty\rangle = \{x \in R : a \le x\}$

$\langle -\infty,b] = \{x \in R : x \le b\}$

$R = \langle -\infty, \infty\rangle$

7.3. Omeđeni skupovi

$[1, \infty\rangle = \{x \in R : x \ge 1\}$ je interval neomeđen s gornje strane.

$\langle -\infty,-2\rangle$ je interval neomeđen s donje strane.

Donja ograda skupa S zove se **minoranta** od S. To je svaki broj m manji (ili jednak) od bilo kojeg elementa skupa S.

Gornja ograda skupa S zove se **majoranta** od S. To je svaki broj M veći (ili jednak) od bilo kojeg elementa skupa S.

Neprazan podskup S brojevnog pravca je omeđen ako postoje brojevi m i M takvi da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$m \leq x \leq M.$$

Dakle, svaki omeđen skup ima konačnu donju i gornju ogradu. U protivnom za skup kažemo da je neomeđen.

7.4. Skup racionalnih brojeva je gust

Između svaka dva racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Između svaka dva realna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Kažemo da su racionalni brojevi gusti na brojevnom pravcu.

Primjeri .

1. Dokazati da je zbroj racionalnog i iracionalnog broja iracionalan broj.

Dokaz: Neka je x racionalan, a y iracionalan broj.
Pretpostavimo da je broj a = x + y racionalan. Tada je a – x = y. Primjećujemo da je lijeva strana jednakosti a – x racionalan broj, dok je y iracionalan. To je kontradikcija, pa odbacujemo tvrdnju da je x + y racionalan i zaključujemo da je x + y iracionalan broj.

2. Neka su x i y iracionalni brojevi. Jesu li brojevi x+y i x-y nužno iracionalni?

Odgovor je: Ne! Na primjer $x = 1 - \sqrt{2}$ i $y = \sqrt{2}$ su iracionalni, ali je njihov zbroj racionalan broj..

3. Dokazati da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

Dokaz. Pretpostavimo da je $\sqrt{2}$ racionalan. On se tada može napisati u obliku $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gdje su *m* i *n* relativno prosti (razlomak je do kraja skraćen). Kvadriranjem jednakosti $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ dobivamo $2 = \frac{m^2}{n^2}$, odnosno $m^2 = 2n^2$. Kako je $2n^2$ djeljivo s 2, s 2 mora biti djeljiv i m^2. Zato je on oblika $m = 2k$ pa dobivamo $2k^2 = n^2$ te je i *n* djeljiv s 2. Kako po pretpostavci, brojevi *m* i *n* nemaju zajedničkog djelitelja, došli smo do kontradikcije. To znači da $\sqrt{2}$ nije racionalan.

Zadaci za vježbu

1. Ako su $x+y$ i $x-y$ racionalni, moraju li brojevi x i y biti racionalni?
2. Dokazati da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj.
3. Dokazati da je $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ iracionalan broj.

8. KOMPLEKSNI BROJEVI

8.1. Kompleksni brojevi

Rješenje jednadžbe $x^2 + 1 = 0$ više nije iz skupa realnih brojeva.

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x^2 = -1$$

$$x = \pm\sqrt{-1} \quad , \quad \sqrt{-1} = i \qquad \text{(imaginarna jedinica)}$$

$$i = \sqrt{-1}$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

…

Algebarski prikaz kompleksnog broja je $z = a + bi$ ili $z = \mathbf{Re}(z)+\mathbf{Im}(z)i$, pri čemu je a **realni dio,** a b **imaginarni dio** kompleksnog broja**.**

Dva kompleksna broja $a + bi$ i $c + di$ su jednaka ako i samo ako je $a = c$ i $b = d$.

Realni brojevi su kompleksni brojevi kod kojih je b = 0.

Na primjer, 0 = 0 + 0i , -4 = -4 + 0i .

Ako je $z = a + bi$, tada je $\bar{z} = a - bi$ njemu konjugiran kompleksan broj.

8.2. Osnovne računske operacije s kompleksnim brojevima

1. Zbrajanje
   $(a+bi)+(c+di) = a+bi+c+di = (a+c)+(b+d)i$

2. Oduzimanje
   $(a+bi)-(c+di) = a+bi-c-di = (a-c)+(b-d)i$

3. Množenje
   $(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$

4. Dijeljenje

$$\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac+bci-adi-bdi^2}{c^2-d^2i^2}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

8.3. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja

Apsolutna vrijednost ili **modul** kompleksnog broja a+bi definira se kao

$$|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}\ .$$

Primjer. Neka je z = -4 + 2i .

$$|z|=|-4+2i|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=2\sqrt{5}$$

Ako su $z_1, z_2, z_3, ..., z_m$ kompleksni brojevi, tada vrijede slijedeće tvrdnje:

1. $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$

$|z_1 z_2 ... z_m|=|z_1||z_2|...|z_m|$

2. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ za $z_2 \neq 0$

3. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

$|z_1+z_2+...+z_m|\leq|z_1|+|z_2|+...+|z_m|$

4. $|z_1+z_2|\geq\left||z_1|-|z_2|\right|$

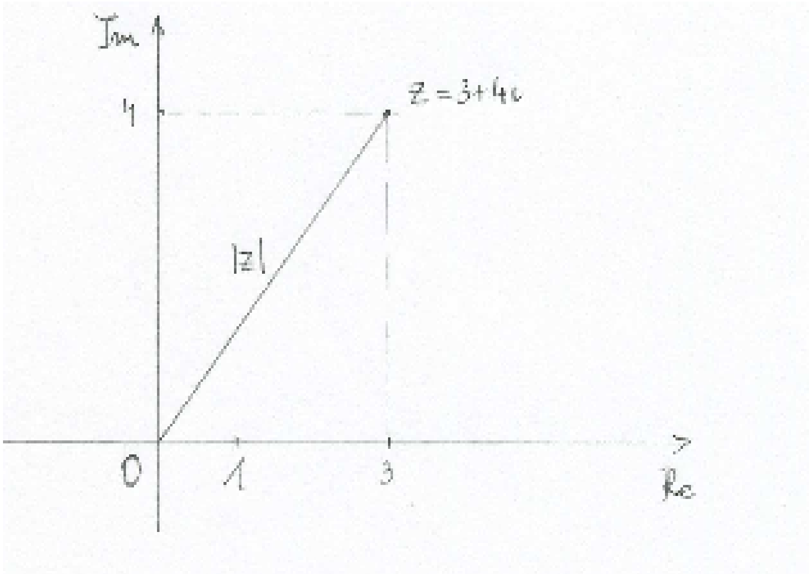
$|z_1-z_2|\geq\left||z_1|-|z_2|\right|$

8.4. Grafički prikaz kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve prikazujemo kao točke u kompleksnoj ili Gaussovoj ravnini.

Broju z = 3 + 4i pridružena je točka (3,4) u toj ravnini. Modul tog broja je

$|z|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5$. sl. 15.



sl. 15

Svakom kompleksnom broju odgovara jedna i samo jedna točka u kompleksnoj ravnini i obrnuto, svakoj točki kompleksne ravnine odgovara jedan i samo jedan kompleksan broj. Zato često za kompleksan broj kažemo da je to točka z.

8.5. Udaljenost između dvije točke

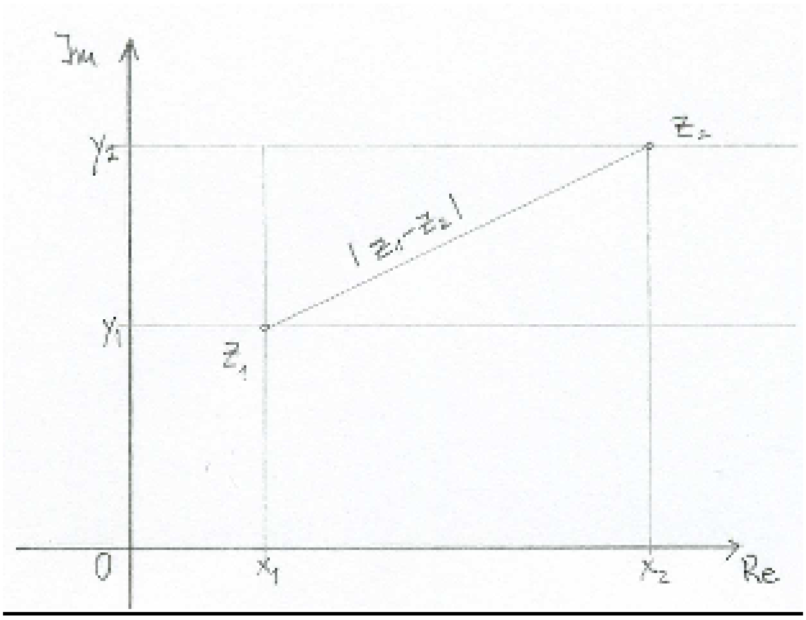
Udaljenost između dvije točke z_1 i z_2 u kompleksnoj ravnini je $|z_1 - z_2|$. sl. 16.

$z_1 = x_1 + y_1 i$

$z_2 = x_2 + y_2 i$

Udaljenost je $|z_1 - z_2|$

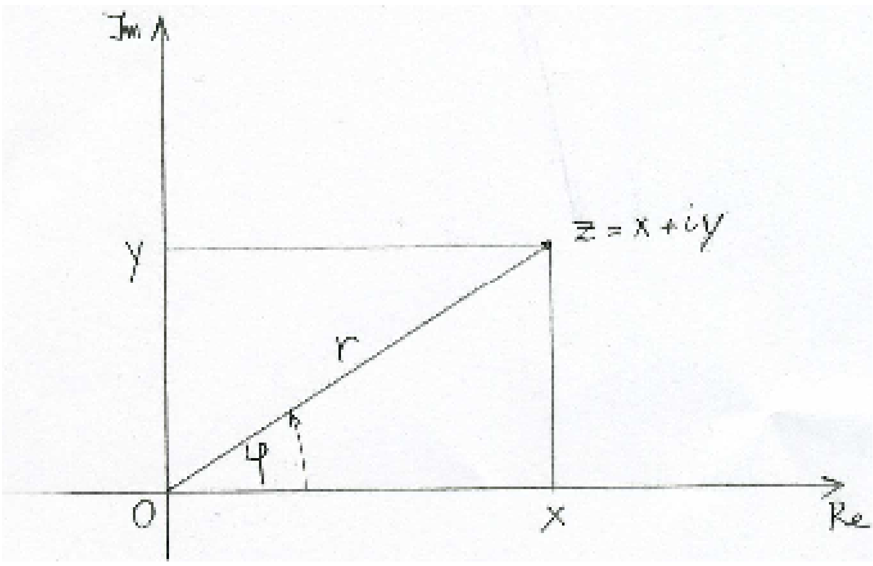
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$



sl. 16

8.6. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Da bi kompleksan broj zapisali u trigonometrijskom obliku promotrimo sl. 17.



sl. 17

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\frac{y}{r} = \sin\varphi$$
$$\frac{x}{r} = \cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$x = r\cos\varphi$$

Uvrstimo u $z = x + yi$ izraze za x i y.

$$z = x + yi$$
$$z = r\cos\varphi + ir\sin\varphi$$
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

φ zovemo argument z , $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$

r zovemo modul z , $r = |z|$

Primjeri. Odredite trigonometrijski prikaz kompleksnih brojeva:

1. $z = \sqrt{3} + i$

Rješenje: $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^{\,2} + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$,

$$tg\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

$$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$$

2. $z = -i$

Rješenje: $|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$, $\qquad tg\varphi = \dfrac{-1}{1} = -1$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$.

$$z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$$

3. $z = 1 + i^{123}$

Rješenje: $z = 1 + (i^4)^{30} \cdot i^3 = 1 + 1 \cdot i^3 = 1 - i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad tg\varphi = \frac{-1}{1} = -1 \Rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

$$z = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}).$$

Zadaci za vježbu

Prikažite u trigonometrijskom obliku kompleksne brojeve:

1. $z = 1 - i\sqrt{3}$,
2. $z = -\sqrt{2}$,
3. $z = -1 + i$

8.7. Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva

Neka su

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Tada je

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Zadatak za vježbu

Izvedite formule za množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva ako su zadani u trigonometrijskom obliku.

8.8. Moivreov teorem (potenciranje kompleksnih brojeva)

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \ldots \cdot z_n = r_1 r_2 r_3 \ldots r_n \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots + \varphi_n)\right]$$

Ako je $z_1 = z_2 = z_3 = \ldots = z_n = z$, tada možemo pisati

$$z^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Primjer. Izračunati $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{60}$.

Rješenje. $z = -1 + i\sqrt{3}$. Trigonometrijski oblik z je

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2, \qquad tg\varphi = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3},$$

$$z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$$

$$z^{60} = 2^{60}(\cos 60\frac{2\pi}{3} + i\sin 60\frac{2\pi}{3}) = 2^{60}(\cos 40\pi + i\sin 40\pi) = 2^{60}(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 2^{60}(1 + i\cdot 0) = 2^{60}$$

Zadatak za vježbu

Izračunajte $(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2})^{50}$.

8.9. Korijen iz kompleksnog broja

Vađenje korijena je, kao što znamo, opeacija inverzna potenciranju.

Broj w nazovimo n-tim korijenom kompleksnog broja z, ako je $w^n = z$, i to pišemo $w = \sqrt[n]{z}$.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots,n\text{-}1$$

Odatle slijedi da postoji n različitih korijena iz kompleksnog broja z, za svaki z ≠ 0.

Primjeri.

1. Odredite sve brojeve z za koje je $z^3 = 8$.

Rješenje.

$z = \sqrt[3]{8}$, w = 8. Prikažimo w u trigonometrijskom obliku: w = 8 (cos 0 +i sin 0).

Za k=0, $w_0 = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{0+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\frac{0+2\cdot 0\cdot\pi}{3}) = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2(1 + i\cdot 0) = 2$

Za k=1,

$$w_1 = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3}) = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 + i\sqrt{3}$$

Za k=2,

$$w_2 = \sqrt[3]{8}(\cos\frac{0+2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\cdot 2\cdot\pi}{3}) = 2(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}) = 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - i\sqrt{3}.$$

2. Izračunajte $\sqrt[3]{-1+i}$.

Rješenje:

w = -1 + i . Izrazimo w u trigonometrijskom obliku: $w = \sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$.

Za k=0, $w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 0\cdot \pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 0\cdot \pi}{3}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

Za k =1, $w_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 1\cdot \pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 1\cdot \pi}{3}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12})$

Za k=2, $w_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 2\cdot \pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2\cdot 2\cdot \pi}{3}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12})$.

3. Nađite sve $\sqrt[6]{1}$.

Rješenje: 1 = 1 + 0i = 1(cos 0 + i sin 0).

Korijeni iz jedinice su općenito

$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$, pri čemu je k = 1, 2, …, n-1.

Za k=0, $e_0 = \cos\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{6} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot \pi}{6} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

Za k=1, $e_1 = \cos\frac{2\cdot 1\cdot \pi}{6} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot \pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$

Za k=2, $e_2 = \cos\frac{2\cdot 2\cdot \pi}{6} + i\sin\frac{2\cdot 2\cdot \pi}{6} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

Za k=3, $e_3 = \cos\frac{2\cdot 3\cdot \pi}{6} + i\sin\frac{2\cdot 3\cdot \pi}{6} = \cos\pi + i\sin\pi$

Za k=4, $e_4 = \cos\frac{2\cdot 4\cdot \pi}{6} + i\sin\frac{2\cdot 4\cdot \pi}{6} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

Za k=5, $e_5 = \cos\frac{2\cdot 5\cdot \pi}{6} + i\sin\frac{2\cdot 5\cdot \pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$

Zadaci za vježbu

1. Nađite sva rješenja jednadžbe $z^8 = 1$.
2. Predočite dobivena rješenja iz zadatka 1. u kompleksnoj ravnini.
3. Izračunajte $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

LITERATURA

1. Elezović, N., Dakić, B., *Matematika 4: udžbenik i zbirka zadataka za 4. razred gimnazije,* Element, Zagreb, 2001.

2. Mintaković, S., Ćurić, F., *Matematika sa zbirkom zadataka,* Školska knjiga, Zagreb, 2003.

3. Pavković, B., Veljan, D., *Elementarna matematika I,* Školska knjiga, Zagreb, 2004.

4. Pavleković, M., *Metodika nastave matematike s informatikom I,* Element, Zagreb, 2001.

5. Pelle, B. *Tako poučavamo matematiku,* Školske novine & HMD, Zagreb, 2004.

6. Radić, M., *Algebra I dio*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

7. Radić, M., *Od prirodnih do realnih brojeva*, Školska knjiga, Zagreb, 1973.

8. Štambuk, Lj., *Matematika I,* Tehnički fakultet Sveučilišta, Rijeka, 2002.

9. Žubrinić, D., *Diskretna matematika*, Element, Zagreb, 2002.